

(1)

$0 < \theta < 90^\circ$, $\theta \neq 30^\circ$ であるため, $\tan \theta$, $\tan 3\theta$ はともに定義される。ここで, 3倍角の公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\tan 3\theta}{\tan \theta} &= \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{3\sin \theta - 4\sin^3 \theta}{4\cos^3 \theta - 3\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{3 - 4\sin^2 \theta}{4\cos^2 \theta - 3} \\ &= \frac{3 - 4(1 - \cos^2 \theta)}{4\cos^2 \theta - 3} \\ &= \frac{4\cos^2 \theta - 1}{4\cos^2 \theta - 3} \\ &= \frac{4d - 1}{4d - 3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\tan 3\theta}{\tan \theta} = \frac{4d - 1}{4d - 3}$$

(2)

$0 < \theta < 90^\circ$, $\theta \neq 30^\circ$ であるため, $\tan(60^\circ + \theta)$, $\tan(60^\circ - \theta)$ はともに定義される。ここで, 加法定理を用いると,

$$\begin{aligned}\tan(60^\circ + \theta) \cdot \tan(60^\circ - \theta) &= \frac{\sqrt{3} + \tan \theta}{1 - \sqrt{3} \tan \theta} \cdot \frac{\sqrt{3} - \tan \theta}{1 + \sqrt{3} \tan \theta} \\ &= \frac{3 - \tan^2 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\ &= \frac{3 - \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right)}{1 - 3\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right)} \\ &= \frac{4\cos^2 \theta - 1}{4\cos^2 \theta - 3} \\ &= \frac{4d - 1}{4d - 3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan(60^\circ + \theta) \cdot \tan(60^\circ - \theta) = \frac{4d - 1}{4d - 3}$$

(3)

(1), (2)より, $0 < \theta < 90^\circ$, $\theta \neq 30^\circ$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\tan 3\theta}{\tan \theta} &= \tan(60^\circ + \theta) \cdot \tan(60^\circ - \theta) \\ \Leftrightarrow \tan \theta \cdot \tan(60^\circ - \theta) \cdot \tan(60^\circ + \theta) &= \tan 3\theta\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\theta = 20^\circ$ とすると, $0 < \theta < 90^\circ$, $\theta \neq 30^\circ$ を満たすため, 上式に代入すると,

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ = \sqrt{3}$$

(1)

与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow (a_{n+2} - 2a_{n+1}) - 2(a_{n+1} - 2a_n) &= 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n &= 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \end{aligned}$$

となる。また, $a_1 = 1, a_2 = 3$ より $b_1 = a_2 - 2a_1 = 1$ である。よって, 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列である。したがって,

$$b_n + 1 = 2^{n-1} \cdot 2 \Leftrightarrow b_n = 2^n - 1$$

である。

(答) $b_n = 2^n - 1$

(2)

(1)の結果より,

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n - 1$$

が成り立つ。両辺を 2^{n+1} で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

となる。よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_1}{2^1} &= \frac{1}{2} \left\{ (n-1) - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ (n-1) - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \right\} \quad (\because a_1 = 1) \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ \therefore a_n &= (n-1) \cdot 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ を代入しても成り立つ。よって, 自然数 n に対し,

$$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + 1$$

となる。

(答) $a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + 1$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

(2)

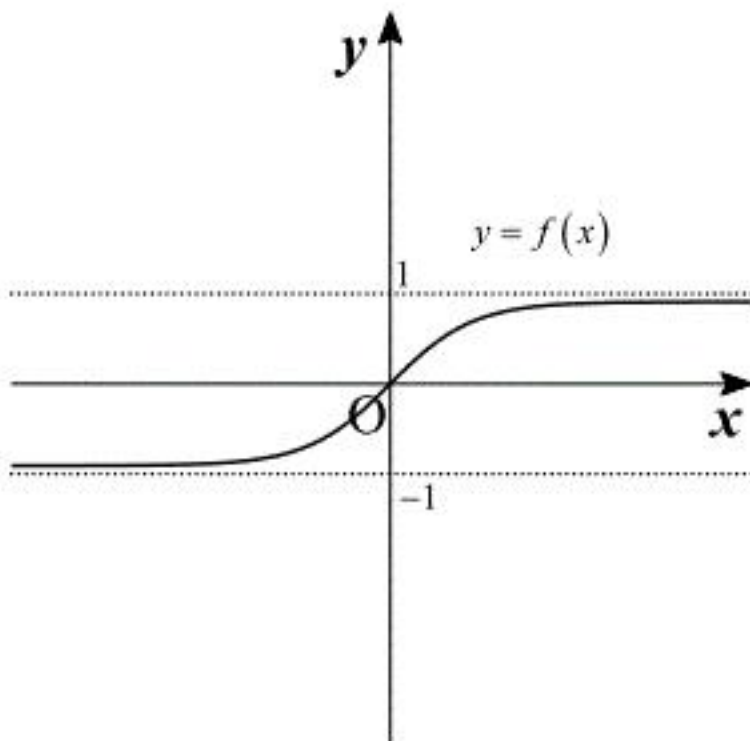
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と第2次導関数 $f''(x)$ は,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 \\ f''(x) &= \left\{ 4 \cdot (e^x + e^{-x})^{-2} \right\}' \\ &= -\frac{8(e^{2x} - 1)}{e^x(e^x + e^{-x})^3}\end{aligned}$$

となる。また、 $f(0) = 0$ である。よって、 $f(x)$ の増減や凹凸は以下の表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	変曲点 0	$\nearrow$

上表より、関数 $y = f(x)$ の変曲点は $(0, 0)$ である。以上より、関数 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 増減・凹凸：前表，グラフ：前図，変曲点： $(0, 0)$

(3)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{e^{2x} + 1} &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 9 \\ \therefore x &= \log 3\end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{e^{2x} + 1} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= \frac{1}{3} \\ \therefore x &= -\frac{1}{2} \log 3\end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より、 $f(x)$ は単調増加であるため、

$$-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log 3 < x < \log 3$$

となる。求める実数は $-\frac{1}{2} < f(at) < \frac{4}{5} \Leftrightarrow -2 < t < 1$ が成り立つ、すなわち、

$$-\frac{1}{2} \log 3 < at < \log 3 \Leftrightarrow -2 < t < 1 \text{ が成り立つ } a \text{ の値であるため、} a \neq 0 \text{ である。}$$

[1] $a > 0$ のとき

$$-\frac{1}{2} \log 3 < at < \log 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2a} \log 3 < t < \frac{1}{a} \log 3$$

であるため、求める条件は

$$\begin{cases} -\frac{1}{2a} \log 3 = -2 \\ \frac{1}{a} \log 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \log 3 \\ a = \log 3 \end{cases}$$

であるが、これを満たす実数 a は存在しない。

[2] $a < 0$ のとき

$$-\frac{1}{2} \log 3 < at < \log 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \log 3 < t < -\frac{1}{2a} \log 3$$

であるため、求める条件は

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \log 3 = -2 \\ -\frac{1}{2a} \log 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \log 3$$

であり、これは $a < 0$ を満たす。

以上、[1],[2]より、求める a の値は、 $a = -\frac{1}{2} \log 3$ である。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{1}{2} \log 3$$

(1)

 $x > 0$ に対し,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \log\left(1 + \frac{t}{x}\right) dt &= \int_0^1 (x+t)' \cdot \log\left(1 + \frac{t}{x}\right) dt \\
 &= \left[(x+t) \log\left(1 + \frac{t}{x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 (x+t) \cdot \left\{ \log\left(1 + \frac{t}{x}\right) \right\}' dt \\
 &= (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \int_0^1 dt \\
 &= (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - [t]_0^1 \\
 &= (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

(2)

(1)の結果より,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \log 3 - 1$$

である。よって,

$$\begin{aligned}
 \log \frac{6}{e} - f\left(\frac{1}{2}\right) &= (\log 6 - 1) - \left(\frac{3}{2} \log 3 - 1\right) = \frac{1}{2} \log \frac{4}{3} \\
 f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} &= \left(\frac{3}{2} \log 3 - 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \log \frac{3}{e}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $e < 3 < 4$ であるため、 $\log \frac{4}{3} > 0$ 、 $\log \frac{3}{e} > 0$ となる。したがって、

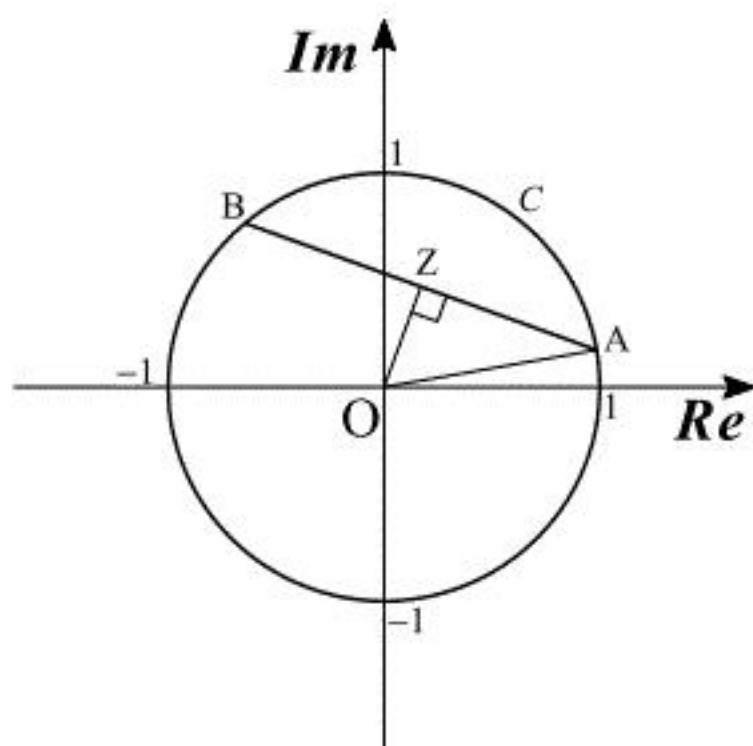
$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < \log \frac{6}{e}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right), \log \frac{6}{e}$$

(1)

複素数平面上で α, β, z が表す点をそれぞれ A, B, Z とする。円 C と点 A, B, Z の位置関係は下図のようになる。



$\triangle AOB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形であるため、直線 OZ は線分 AB の垂直二等分線となる。

$\triangle AOZ$ において三平方の定理より、

$$\begin{aligned} |\alpha - z| &= AZ \\ &= \sqrt{OA^2 - OZ^2} \\ &= \sqrt{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

である。また、 $\angle OZA = \angle OZB = 90^\circ$ であるため、上図において点 A, B は点 Z を中心に原点

O を $\pm 90^\circ$ 回転させて長さを $\frac{OA}{OZ} = \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|}$ 倍した点である。よって、

$$\begin{aligned} \alpha - z &= i \cdot \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \cdot (0 - z) \Leftrightarrow \alpha = z - \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} zi \\ \beta - z &= -i \cdot \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \cdot (0 - z) \Leftrightarrow \beta = z + \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} zi \end{aligned}$$

となる。 α と β を入れ替えても線分 AB の中点は z になるため、まとめると、

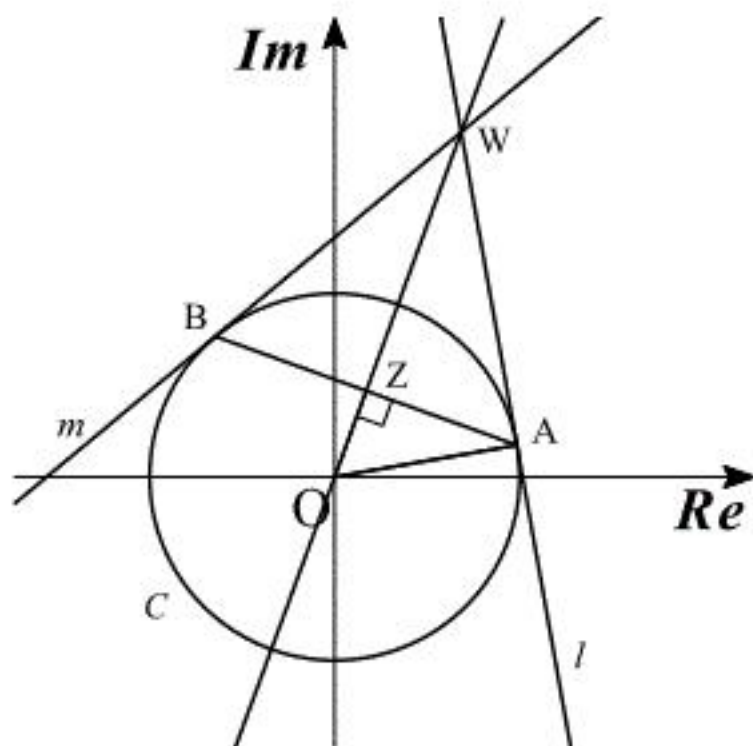
$$(\alpha, \beta) = \left(z \left(1 \pm i \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \right), z \left(1 \mp i \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \right) \right) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (\alpha, \beta) = \left(z \left(1 \pm i \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \right), z \left(1 \mp i \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|} \right) \right) \quad (\text{複号同順})$$

(2)

w が表す点を W とする。円 C と接線 l, m 、点 A, B, Z, W の位置関係は下図のようになる。



$\triangle WAB$ は $WA = WB$ の二等辺三角形であり、点 W は線分 AB の垂直二等分線上にあるため、

(1) と合わせると、点 O, Z, W は同一直線上にある。 $\angle AOZ = \angle AOW$, $\angle OZA = \angle OAW = 90^\circ$ より、 $\triangle OAZ$ と $\triangle OWA$ は相似であるため、

$$OA : OZ = OW : OA \Leftrightarrow OW = \frac{1}{|z|}$$

である。したがって

$$w = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{z}{|z|^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad w = \frac{z}{|z|^2}$$

(3)

実数 X, Y を用いて、 $w = X + Yi$ とおく。点 z が与えられた範囲を動くとき、

$z = \frac{1}{2} + ti \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < t < \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ と表せる。よって、(2) の結果より、

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{|z|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + ti}{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + t^2} \\ &= \frac{2}{4t^2 + 1} + \frac{4t}{4t^2 + 1} i \end{aligned}$$

となる。よって、 X, Y は実数であるため、

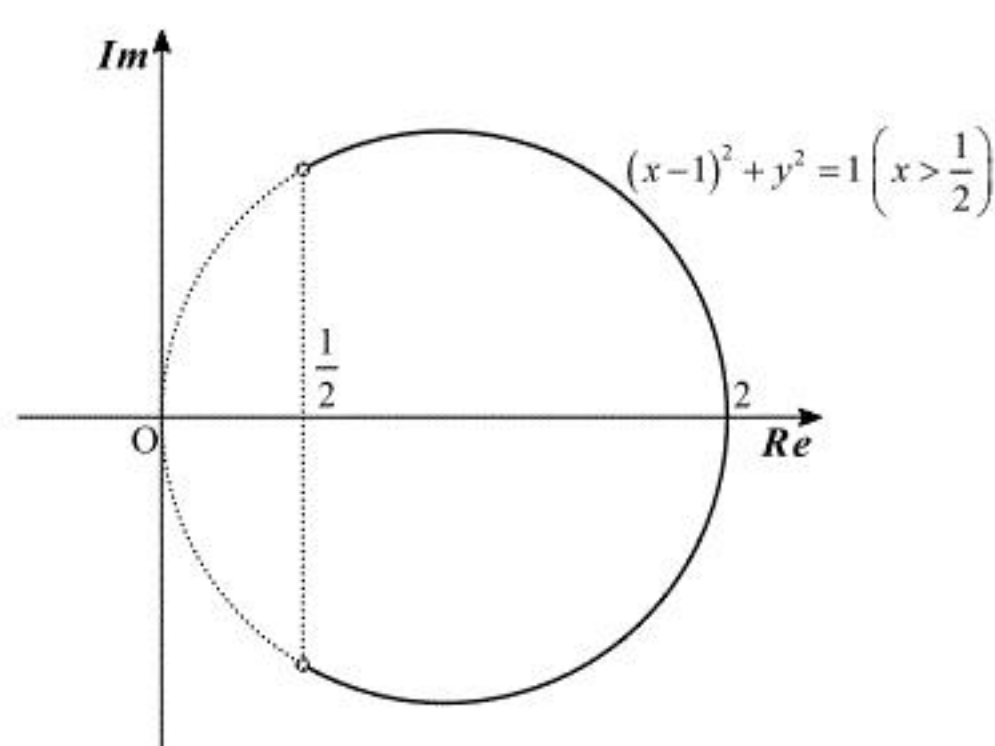
$$\begin{cases} X = \frac{2}{4t^2 + 1} \\ Y = \frac{4t}{4t^2 + 1} \end{cases}$$

と表せる。この式より $Y = 2tX$ が得られる。また、 $X = \frac{2}{4t^2 + 1} \neq 0$ より、 $2t = \frac{Y}{X}$ である。これを代入すると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{4t^2 + 1} \\ \Leftrightarrow X \left\{ (2t)^2 + 1 \right\} &= 2 \\ \Leftrightarrow X \left\{ \frac{Y^2}{X^2} + 1 \right\} &= 2 \\ \Leftrightarrow Y^2 + X^2 &= 2X \\ \Leftrightarrow (X - 1)^2 + Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

が得られる。また、 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < t < \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\frac{1}{2} < X \leq 2$ である。よって、点 w の軌跡は円

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ の $\frac{1}{2} < x \leq 2$ の部分であり、下図の実線部のようになる。



(答) 前図