

(1)

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = a(1-x^2) \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = -2ax$$

となる。 C_1, C_2 の共有点 P の x 座標を $x=p$ ($p \neq -1$) とすると、 $x=p$ における C_1, C_2 の y 座標と接線の傾きが等しいから、

$$\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{p+1} = a(1-p^2) \\ -\frac{1}{(p+1)^2} = -2ap \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $p=1$ とすると、 $f(p) = f(1) = \frac{1}{2}, g(p) = g(1) = 0$ となるから、 $\textcircled{1}$ は成立しない。ゆ

えに、 $p \neq \pm 1$ であり、

$\textcircled{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{(1-p)(1-p^2)} \quad (\because p \neq \pm 1 \Leftrightarrow 1-p^2 \neq 0) \\ -\frac{1}{(p+1)^2} = -2ap \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{(1-p)(1-p^2)} \\ -\frac{1}{(p+1)^2} = -2 \cdot \frac{1}{(1-p)(1-p^2)} \cdot p \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、

$$-\frac{1}{(p+1)^2} = -2 \cdot \frac{1}{(1-p)(1+p)^2} \cdot p$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2p = 1-p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$$

となるから、

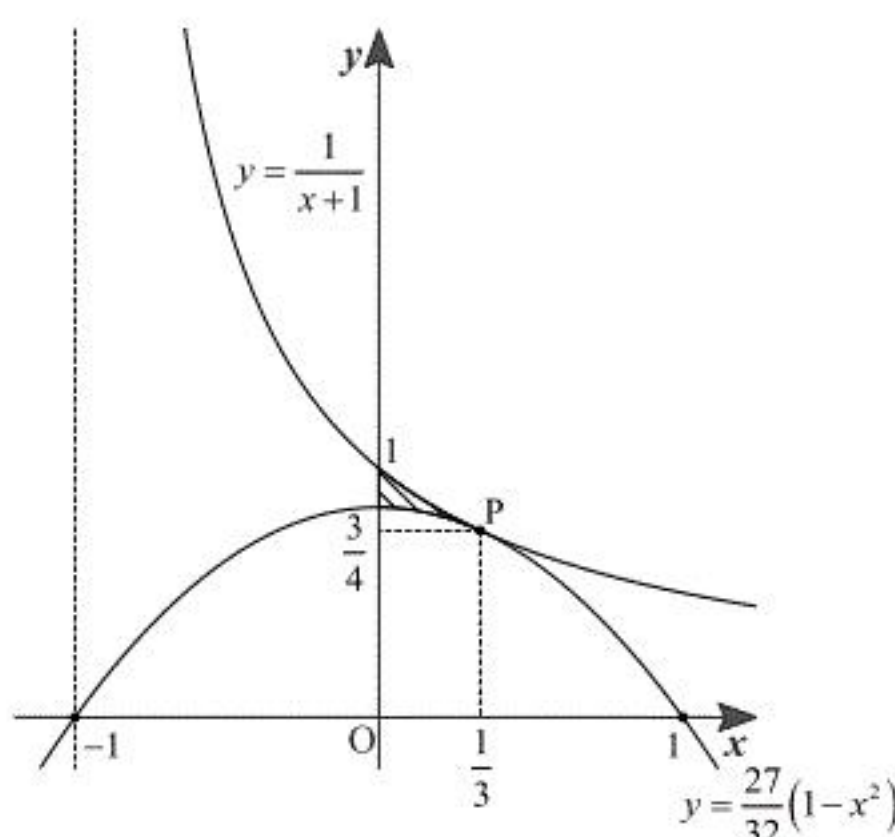
$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{3} \\ a = \frac{27}{32} \end{cases}$$

である。以上より、 $a = \frac{27}{32}, P\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{27}{32}, P\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

(2)

2 曲線 C_1, C_2 と y 軸とで囲まれた図形は、下図における斜線部である。



したがって、求める面積は上図における斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{27}{32}(1-x^2) \right\} dx &= \left[\log(x+1) - \frac{27}{32}x + \frac{9}{32}x^3 \right]_{-1}^{\frac{1}{3}} \\ &= \log \frac{4}{3} - \frac{13}{48} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log \frac{4}{3} - \frac{13}{48}$$

(1)

$a_1 = 0 = -\tan 0$ より $\theta_1 = 0$ である。また、条件式から、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 \cos \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}}{a_1 \sin \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7}} \\ &= -\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}} \\ &= -\tan \frac{2\pi}{7} \\ a_3 &= \frac{a_2 \cos \frac{2\pi}{7^2} - \sin \frac{2\pi}{7^2}}{a_2 \sin \frac{2\pi}{7^2} + \cos \frac{2\pi}{7^2}} \\ &= \frac{-\tan \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7^2} - \sin \frac{2\pi}{7^2}}{-\tan \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7^2} + \cos \frac{2\pi}{7^2}} \\ &= \frac{-\cos \frac{2\pi}{7^2} \left(\tan \frac{2\pi}{7} + \tan \frac{2\pi}{7^2} \right)}{-\cos \frac{2\pi}{7^2} \left(\tan \frac{2\pi}{7} \cdot \tan \frac{2\pi}{7^2} - 1 \right)} \\ &= -\frac{\tan \frac{2\pi}{7} + \tan \frac{2\pi}{7^2}}{1 - \tan \frac{2\pi}{7} \cdot \tan \frac{2\pi}{7^2}} \left(\because \cos \frac{2\pi}{7^2} \neq 0 \right) \\ &= -\tan \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{2\pi}{7^2} \right) \\ &= -\tan \frac{16}{49} \pi \end{aligned}$$

となり、 $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_3 < \frac{\pi}{2}$ から、

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{7}, \theta_3 = \frac{16}{49} \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{7}, \theta_3 = \frac{16}{49} \pi$$

(2)

(1)より、 $n \geq 2$ のとき θ_n は

$$\begin{aligned} \theta_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\pi}{7^k} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{7}} \\ \therefore \theta_n &= \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} \right\} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と推測できる。 $n=1$ のとき

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{1-1} \right\} = 0$$

より、 $\textcircled{1}$ は成立する。以下、数学的帰納法を用いて、 $n \geq 2$ のとき $\textcircled{1}$ が成立することを示す。

[1] $n=2$ のとき

$\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{2-1} \right\} = \frac{2\pi}{7}$$

となる。(1)より $\theta_2 = \frac{2\pi}{7}$ であるから、 $n=2$ のとき $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ (k は $k \geq 2$ を満たす自然数) のとき

$\textcircled{1}$ が成立する、すなわち、 $\theta_k = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{k-1} \right\}$ であると仮定する。このとき、 $a_k = -\tan \theta_k$

であるから、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k \cos \frac{2\pi}{7^k} - \sin \frac{2\pi}{7^k}}{a_k \sin \frac{2\pi}{7^k} + \cos \frac{2\pi}{7^k}} \\ &= \frac{-\tan \theta_k \cdot \cos \frac{2\pi}{7^k} - \sin \frac{2\pi}{7^k}}{-\tan \theta_k \cdot \sin \frac{2\pi}{7^k} + \cos \frac{2\pi}{7^k}} \\ &= \frac{-\cos \frac{2\pi}{7^k} \left(\tan \theta_k + \tan \frac{2\pi}{7^k} \right)}{-\cos \frac{2\pi}{7^k} \left(\tan \theta_k \cdot \tan \frac{2\pi}{7^k} - 1 \right)} \\ &= -\frac{\tan \theta_k + \tan \frac{2\pi}{7^k}}{1 - \tan \theta_k \cdot \tan \frac{2\pi}{7^k}} \left(\because \cos \frac{2\pi}{7^k} \neq 0 \right) \\ &= -\tan \left(\theta_k + \frac{2\pi}{7^k} \right) \\ &= -\tan \left[\frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{k-1} \right\} + \frac{2\pi}{7^k} \right] \\ &= -\tan \left[\frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^k \right\} \right] \end{aligned}$$

となる。このとき、 $k \geq 2$ より、

$$0 < \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^k \right\} < \frac{\pi}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$$

であることに注意して、 $-\frac{\pi}{2} < \theta_{k+1} < \frac{\pi}{2}$ より、

$$\theta_{k+1} = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^k \right\}$$

である。したがって、 $n=k+1$ において $\textcircled{1}$ が成立する。

以上、[1], [2]より、数学的帰納法から、 $n \geq 2$ のとき

$$\theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} \right\}$$

である。したがって、 $n=1$ でも成立することから、任意の自然数 n で $\theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} \right\}$ が成立する。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} (1 - 0) \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

であり、 $\tan x$ は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で連続であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\tan \theta_n) \\ &= -\tan \frac{\pi}{3} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{3}$$

(1)

実数 a, b を用いて, $z = a + bi$ とおく。このとき, $A(a+1+bi), B(-a+1-bi)$ となるから,

$$OA^2 = (a+1)^2 + b^2$$

$$OB^2 = (-a+1)^2 + b^2$$

$$AB^2 = \{(-a+1)-(a+1)\}^2 + (-b-b)^2 = 4a^2 + 4b^2$$

である。ゆえに, 3点 O, A, B は正三角形の頂点であるから,

$$OA^2 = OB^2 = AB^2$$

が成立するので,

$$\begin{cases} OA^2 = OB^2 \\ OA^2 = AB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 \\ a^2 + 2a + 1 + b^2 = 4a^2 + 4b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 0 \\ 3a^2 - 2a - 1 + 3b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

となる。したがって, $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i$ である。

(答) $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i$

(2)

3点 O, A, B が鋭角三角形の頂点となるから, $\triangle OAB$ の3辺について,

$$\begin{cases} OA^2 + OB^2 > AB^2 \\ OB^2 + AB^2 > OA^2 \\ AB^2 + OA^2 > OB^2 \end{cases}$$

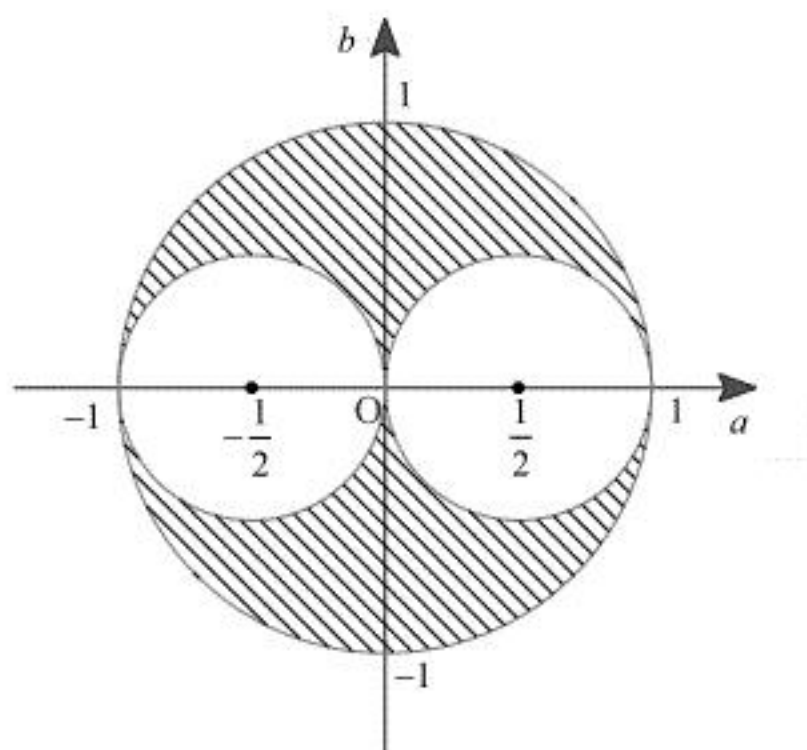
のすべてが成り立つ。よって,

$$\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 + (-a+1)^2 + b^2 > 4a^2 + 4b^2 \\ (-a+1)^2 + b^2 + 4a^2 + 4b^2 > (a+1)^2 + b^2 \\ 4a^2 + 4b^2 + (a+1)^2 + b^2 > (-a+1)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 < 1 \\ a^2 + b^2 - a > 0 \\ a^2 + b^2 + a > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 < 1 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 > \frac{1}{4} \\ \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

となる。したがって, 求める点 z の全体を図示すると, 下図における斜線部(境界は除く)となる。



(答) 前図の斜線部(境界は除く)

(1)

$$f(x)=x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^3}(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

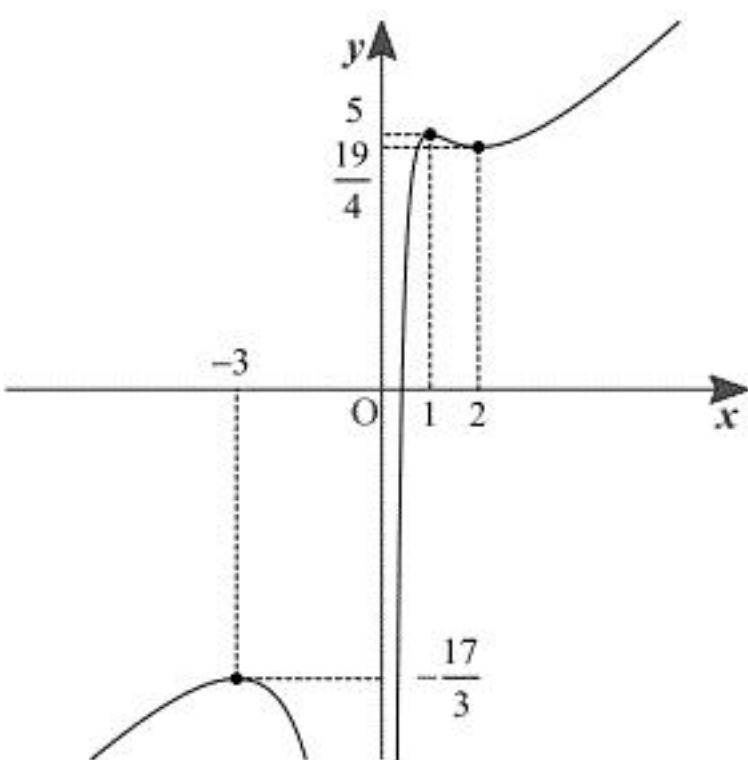
であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のとおりになる。

x	...	-3	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	↗	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{17}{3}$	↘	↗	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗

よって、 $f(x)$ は、

$$x=-3 \text{ のとき極大値 } -\frac{17}{3}, \quad x=1 \text{ のとき極大値 } 5, \quad x=2 \text{ のとき極小値 } \frac{19}{4}$$

をとる。また、 $y=f(x)$ のグラフの概形は、下図の通りである。



(答) 増減表：前表、極値：前述、概形：前図

(2)

3次方程式 $x^3-ax^2+7x-3=0$ は、

$$\begin{aligned} x^3-ax^2+7x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3+7x-3 &= ax^2 \end{aligned}$$

であり、 $x=0$ はこの方程式の解ではない。ゆえに、 $x \neq 0$ であり、両辺を x^2 で割ると

$$x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}=a \Leftrightarrow f(x)=a \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。 $\textcircled{1}$ の異なる実数解の個数と、 $y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数は等しいから、 $\textcircled{1}$ が相異なる3つの実数解をもつ実数 a の範囲は、 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点が3個となる実数 a の範囲に一致する。したがって、(1)のグラフより、求める範囲は、

$$a<-\frac{17}{3}, \frac{19}{4}<a<5$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a<-\frac{17}{3}, \frac{19}{4}<a<5$$

また、 $\textcircled{1}$ が重解をもつ実数 a の値は、 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ が接するときの実数 a の値と一致するから、

$$a=-\frac{17}{3}, \frac{19}{4}, 5$$

となる。以下、それぞれの a の値における、 $\textcircled{1}$ の実数解を考える。

[1] $a=-\frac{17}{3}$ のとき

$\textcircled{1}$ を解くと、

$$\begin{aligned} x^3+\frac{17}{3}x^2+7x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+3)^2(3x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -3, \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a=\frac{19}{4}$ のとき

$\textcircled{1}$ を解くと、

$$\begin{aligned} x^3-\frac{19}{4}x^2+7x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-2)^2(4x-3) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{4}, 2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $a=5$ のとき

$\textcircled{1}$ を解くと、

$$\begin{aligned} x^3-5x^2+7x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 3 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、

$$a=-\frac{17}{3} \text{ のとき, } x=-3, \frac{1}{3}$$

$$a=\frac{19}{4} \text{ のとき, } x=\frac{3}{4}, 2$$

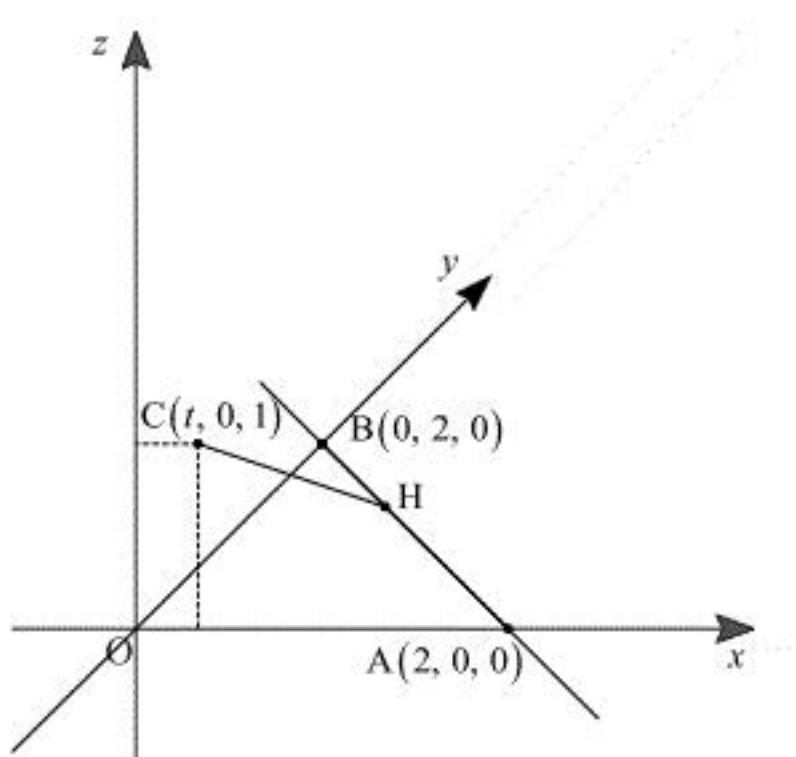
$$a=5 \text{ のとき, } x=1, 3$$

を解に持つ。

(答) 前述

(1)

xyz 空間上の点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(t, 0, 1)$ は下図のようになる。



点 H は直線 AB 上にあるから、実数 p を用いて、

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= p\overline{OA} + (1-p)\overline{OB} \\ &= p(2, 0, 0) + (1-p)(0, 2, 0) \\ &= (2p, 2-2p, 0)\end{aligned}$$

となる。また、 $AB \perp CH$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{CH} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2, 2, 0) \cdot (2p-t, 2-2p, -1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(2p-t) + 2(2-2p) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t - 8p + 4 &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。よって点 H の座標は、 $H\left(1+\frac{t}{2}, 1-\frac{t}{2}, 0\right)$ となる。このとき、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、 $AB \perp CH$ より、

$$\begin{aligned}|\overline{CH}|^2 &= \left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \\ \therefore |\overline{CH}| &= \sqrt{\frac{t^2}{2} - 2t + 3}\end{aligned}$$

であるから、 $|\overline{AB}| = 2\sqrt{2}$ と合わせて、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{CH}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{t^2}{2} - 2t + 3} \\ &= \sqrt{t^2 - 4t + 6}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } H \text{ の座標: } H\left(1+\frac{t}{2}, 1-\frac{t}{2}, 0\right), \text{ 三角形 } ABC \text{ の面積: } \sqrt{t^2 - 4t + 6}$$

(2)

点 C から直線 OA に下ろした垂線が、直線 OA と交わる点を D とする。このとき、三角錐 $OABC$ の体積を V とすると、

$$V = \frac{1}{3} \cdot |\overline{CD}| \cdot \triangle OAB = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $(\text{平面 } ABC) \perp OI$ であるから、(1) より、

$$V = \frac{1}{3} \cdot |\overline{OI}| \cdot \triangle ABC = \frac{1}{3} \cdot |\overline{OI}| \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 6} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。したがって、①、②より

$$\begin{aligned}|\overline{OI}| \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 6} &= 2 \\ \Leftrightarrow |\overline{OI}| &= \frac{2}{\sqrt{(t-2)^2 + 2}}\end{aligned}$$

が得られる。ゆえに、 $t=2$ のとき、 $|\overline{OI}|$ は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。このとき点 C は $C(2, 0, 1)$ であ

り、平面 ABC は z 軸と平行であるから、点 I は原点 O から直線 AB におろされた垂線の足となる。したがって、 $z=0$ における $y=-x+2$ と $y=x$ の交点を考えて、 $I(1, 1, 0)$ となる。

(答) $t=2, I(1, 1, 0)$