平成３０年度　理学部　入学試験

数　　学

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけない。

2　この冊子の問題は，１ページから２ページまで印刷されている。

3　解答冊子には受験番号がすでに記入してあるので，その番号が**自分の受験番号と一致する**ことを確認すること。万一自分の受験番号と異なる場合には，手を挙げて監督者に知らせること。

4　ボールペン，色鉛筆は使用しないこと。

5　解答冊子の表紙の**志望学科名をまるで囲み（２箇所）**，所定の欄に**氏名**を記入すること。また解答冊子の注意書きを良く読むこと。

6　解答は解答冊子の所定の欄に記入すること。各問題ごとに解答用紙と下書き用紙とがあるので注意すること。解答が解答用紙に書ききれない場合は（明示した上で）つづきを下書き用紙に書いてもよい。ただしページ数の印刷されていないページは採点の対象としない。

7　下書き用紙に記入したものは，消さずに残しておくこと。

8　試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。

9　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。

１０　試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

1 a を正の定数とする。$y=\dfrac{1}{x+1}$ が表す曲線を C_1, $y=a(1-x^2)$ が表す曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 が共有点 P をもち, 点 P において共通の接線をもつとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値と点 P の座標を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1, C_2 と y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\frac{a_n\cos\dfrac{2\pi}{7^n}-\sin\dfrac{2\pi}{7^n}}{a_n\sin\dfrac{2\pi}{7^n}+\cos\dfrac{2\pi}{7^n}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

をみたすものとする。数列 $\{\theta_n\}$ を $a_n=-\tan\theta_n$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ により定めるとき, 次の問いに答えよ。

(1) θ_2, θ_3 を求めよ。

(2) 一般項 θ_n を推測し, それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

3 z を複素数とする。複素数平面上の原点 O と, 2 点 A$(z+1)$, B$(-z+1)$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, A, B が正三角形の頂点となるような複素数 z を求めよ。

(2) 3 点 O, A, B が鋭角三角形の頂点となるような点 z の全体を複素数平面上に図示せよ。ここで鋭角三角形とは内角がすべて 90° より小さい三角形のことである。

4 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}$ の増減と極値を調べ, グラフの概形をかけ。

(2) 3次方程式 $x^3 - ax^2 + 7x - 3 = 0$ が相異なる3つの実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。また, この方程式が重解をもつときの実数 a の値とそのときの解を求めよ。

5 空間内に原点 O$(0,0,0)$ と2点 A$(2,0,0)$, B$(0,2,0)$ がある。また実数 t に対し点 C $(t,0,1)$ をとり, 点 C から直線 AB に下した垂線が直線 AB と交わる点を H とする。

(1) 点 H の座標と三角形 ABC の面積を t で表せ。

(2) 原点 O から3点 A, B, C を通る平面に下した垂線がその平面と交わる点を I とする。OI が最大となる t の値とそのときの I の座標を求めよ。

平成31年度 工学部 入学試験問題

数　　学

（前　期）

注意事項

1　問題冊子１冊，解答用紙３枚が配られているか確認すること。

2　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

3　試験中に問題冊子（２頁よりなる）の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。

4　解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。ボールペン，色鉛筆は使用しないこと。

5　各解答用紙上部には２箇所**受験番号**を記入する欄がある。試験開始後直ちに記入すること。記入箇所は合計**６箇所**である。

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

1 a を正の定数とする。不等式 $a^{2x}+6a^{-x}>7$ を解け。

2 a を正の定数とする。媒介変数表示

$$x=a(1+\sin 2\theta),\ y=\sqrt{2}\,a(\cos\theta-\sin\theta)\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

で表される曲線 C について, 次の問いに答えよ。

(1) θ を消去して, x と y の方程式を求め, 曲線 C を図示せよ。

(2) x 軸, y 軸および曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積が $\dfrac{\pi}{2}$ に等しいとき, a の値を求めよ。

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

(1) a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を, n の式で表せ。

(3) $a_{n+2}-2$ は a_n の倍数であることを示せ。

4 複素数平面上の 5 点 O(0), A(α), B(β), C(γ), D($2-\sqrt{3}i$) は

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2-\sqrt{3}i}{\gamma}=\frac{\overline{\alpha}}{2+\sqrt{3}i}$$

を満たしている。ただし, $|\alpha|=\sqrt{3}$ であり, 3 点 O, A, D は一直線上にない。次の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, B, D は一直線上にあることを示せ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ のとき, $\dfrac{\alpha}{2-\sqrt{3}i}$ の実部を求めよ。

5 a を定数とする。$0<x<\pi$ において, 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{4+\cos x}$ および $g(x)=f(x)-ax$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $g(x)$ が極値をとるような a の値の範囲を求めよ。