

1

(1)

与えられた等式①に $y = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\max\left(x, \frac{1}{2}\right) = \min\left(x + \frac{1}{2}, 1\right) \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。 x の値で場合分けを行う。

[1] $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$\max\left(x, \frac{1}{2}\right) = x$$

となる。また、 $x + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ より

$$\min\left(x + \frac{1}{2}, 1\right) = 1$$

となる。よってこのとき②から $x = 1$ が得られ、これは $x \geq \frac{1}{2}$ を満たしている。

[2] $x < \frac{1}{2}$ のとき

$$\max\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

となる。また、 $x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ より

$$\min\left(x + \frac{1}{2}, 1\right) = x + \frac{1}{2}$$

となる。よってこのとき②から

$$\frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

が得られ、これは $x < \frac{1}{2}$ を満たしている。

以上[1], [2]より、求める x, y の組は $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ である。

(答) $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$

(2)

はじめに $x \geq y$ の場合を考える。このとき

$$\max(x, y) = x$$

である。以下、 $x + y$ の値で場合分けを行う。

[1] $x + y \geq 1$ のとき

$$\min(x + y, 1) = 1$$

となり、①から $x = 1$ が得られる。また、

$$1 \geq y \text{ かつ } 1 + y \geq 1$$

$$\therefore 0 \leq y \leq 1$$

が満たされる。

[2] $x + y < 1$ のとき

$$\min(x + y, 1) = x + y$$

となり、①から

$$x = x + y \Leftrightarrow y = 0$$

が得られる。また、

$$x \geq 0 \text{ かつ } x + 0 < 1$$

$$\therefore 0 \leq x < 1$$

が満たされる。

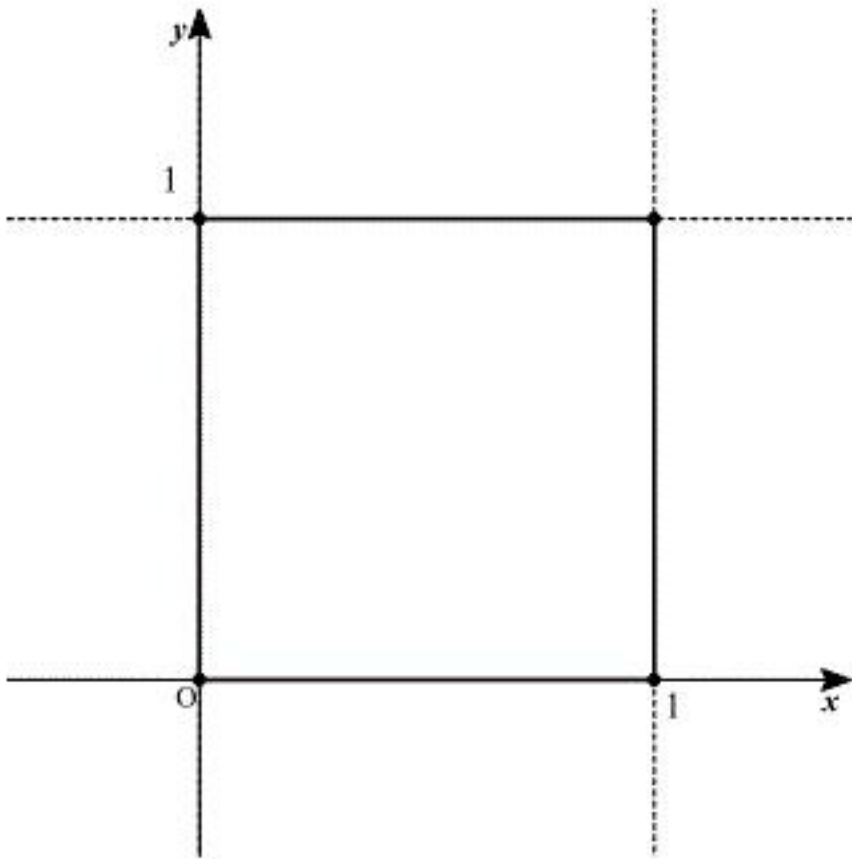
以上[1], [2]より、 $x \geq y$ のときに①を満たす x, y の組の条件は

$$(x = 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1) \text{ または } (y = 0 \text{ かつ } 0 \leq x < 1) \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。等式①が x, y に関して対称であることより、 $x \leq y$ のときの条件は

$$(y = 1 \text{ かつ } 0 \leq x \leq 1) \text{ または } (x = 0 \text{ かつ } 0 \leq y < 1) \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となるから、①を満たす (x, y) が表す点全体が作る集合は、以下のように③かつ④を図示したものになる。



(答) 前図

(1)

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

と変形できる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ なので

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

であり

$$-\sqrt{3} \leq t \leq 2$$

と求まる。

(答) $-\sqrt{3} \leq t \leq 2$

(2)

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

を利用すると、 $f(\theta)$ は t を用いて

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1) - (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) - 2 \\ &= t^2 - t - 2 \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $f(\theta) = t^2 - t - 2$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} f(\theta) &> 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - t - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-2) &> 0 \\ \Leftrightarrow t < -1, 2 < t \end{aligned}$$

となるから、(1)で求めた t の取りうる値の範囲を考慮すると

$$-\sqrt{3} \leq t < -1$$

を満たす θ の値の範囲を求めればよい。 $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ に注意すると

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} \leq t < -1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) < -1 \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) < -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{6}\pi < \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6}\pi < \theta \leq \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{5}{6}\pi < \theta \leq \pi$

3

(1)

与えられた等式 $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ に関して

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 4(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} &= 9\overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と変形できる。

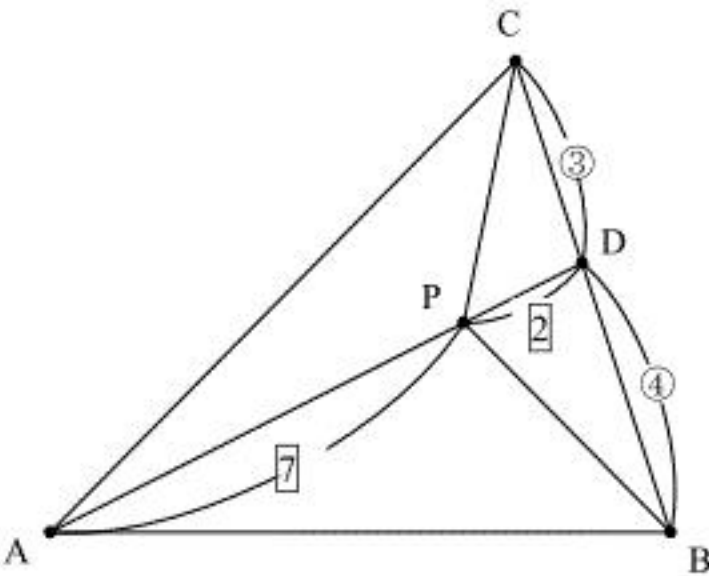
(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{7}{9} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7} \end{aligned}$$

と変形できる。 $\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7} = \overrightarrow{AD}$ とすると、D は線分 BC を 4:3 に内分する点である。 $\triangle ABC$ と 2 点 P, D を図示すると以下のようになる。



$\triangle ABC$ の面積を S とすると、求める面積の比は前図より

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot S : \frac{2}{9} \cdot S : \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot S = 4:2:3$$

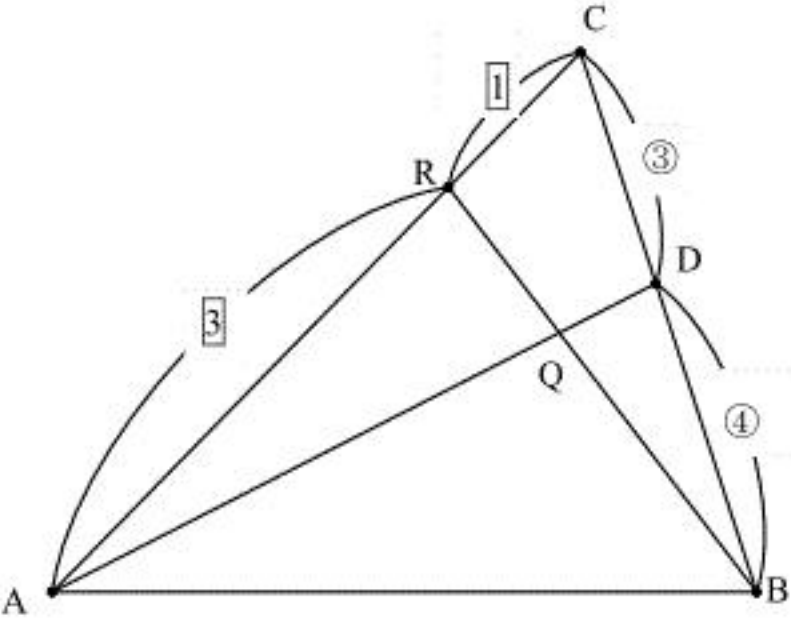
と求まる。

(答) 4:2:3

(3)

直線 BQ と直線 AC の交点を点 R とする。 $\triangle QAB$ と $\triangle QBC$ の面積比が 3:1 であることから、
 $AR:RC = 3:1$

となる。この点を図示すると以下のようになる。



前図においてメネラウスの定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{BD}{CB} \cdot \frac{QA}{DQ} \cdot \frac{RC}{AR} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{7} \cdot \frac{QA}{DQ} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{QA}{DQ} &= \frac{21}{4} \end{aligned}$$

とわかる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \frac{AQ}{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{AQ}{DQ + AQ} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{\frac{21}{4}}{1 + \frac{21}{4}} \cdot \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{21}{25} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7} \\ \Leftrightarrow 25\overrightarrow{AQ} &= 9\overrightarrow{AB} + 12\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow -25\overrightarrow{QA} &= 9(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA}) + 12(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA}) \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{QA} + 9\overrightarrow{QB} + 12\overrightarrow{QC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $4\overrightarrow{QA} + 9\overrightarrow{QB} + 12\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

(1)

Bが優勝するのは、Bが初戦でAに勝ち、その後A以外の選手との試合に2回連続で勝つ場合であり、その確率は

$$(1-p) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-p}{4}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1-p}{4}$$

(2)

Cが優勝するのは、Cが初戦でDに勝ち、2回戦でAまたはBに勝った上で、決勝戦においてA以外の選手に勝つ場合であり、その確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{(1-p)(2p+1)}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(1-p)(2p+1)}{8}$$

(3)

Aが準優勝するのは、Aが初戦と2回戦に勝ち、決勝戦で敗れる場合であり、その確率は

$$p^2 \cdot (1-p) = -p^3 + p^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。次に、Hが準優勝する確率を求める。Hが決勝戦でどの選手に敗れて準優勝するかで場合分けする。

[1] Hが決勝戦でAに敗れて準優勝する場合

H, Aが決勝戦まで勝ち進む確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, p^2 だから、このような事象が起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p^2 \cdot p = \frac{p^3}{4}$$

である。

[2] Hが決勝戦でBに敗れて準優勝する場合

これは、(1)で考えた事象のうちHが決勝戦まで勝ち進む場合である。よってこのような事象が起こる確率は

$$\frac{1-p}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-p}{16}$$

である。

[3] Hが決勝戦でCまたはDに敗れて準優勝する場合

このうちCが決勝戦の相手である場合は、(2)で考えた事象のうちHが決勝戦まで勝ち進む場合である。よってこのような事象が起こる確率は

$$\frac{(1-p)(2p+1)}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(1-p)(2p+1)}{32}$$

である。Dが決勝戦の相手である場合の確率も、同様に $\frac{(1-p)(2p+1)}{32}$ である。

以上[1]～[3]より、Hが準優勝する確率は

$$\frac{p^3}{4} + \frac{1-p}{16} + \frac{(1-p)(2p+1)}{32} \cdot 2 = \frac{2p^3 - p^2 + 1}{8} \quad \dots \textcircled{2}$$

とわかる。Aが準優勝する確率とHが準優勝する確率が等しくなるのは、①、②より

$$\begin{aligned} -p^3 + p^2 &= \frac{2p^3 - p^2 + 1}{8} \\ \Leftrightarrow 10p^3 - 9p^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2p-1)(5p^2 - 2p - 1) &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{5} \quad (\because 0 < p < 1) \end{aligned}$$

のときであると求まる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}$$

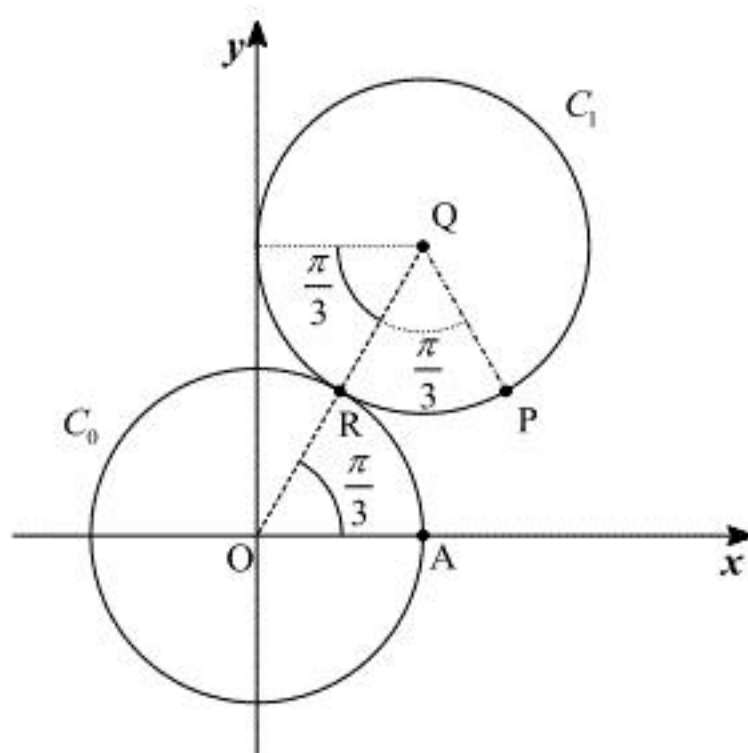
5

(1)

円 C_0 と円 C_1 の接点を R とすると、弧 AR と弧 PR の長さが等しく、円 C_0 と円 C_1 の半径が等

しいことより、 $\angle AOR = \angle PQR$ が得られる。ここで、円 C_1 が角 $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したとき、すなわ

ち $\angle QOA = \frac{\pi}{3}$ となったときの 2 つの円及び各点を図示すると以下のようなになる。



前図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

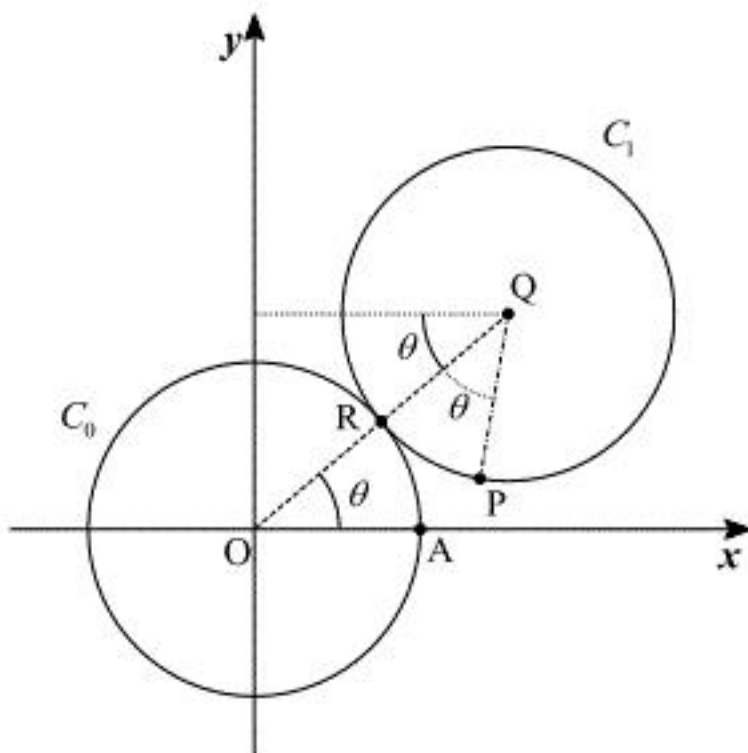
と求まる。

(答) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)

(1)と同様に考えると、円 C_1 が角 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) だけ回転したとき、すなわち $\angle QOA = \theta$ と

なったときの 2 つの円及び各点の位置関係は以下のようなになる。



前図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\pi + 2\theta) \\ \sin(\pi + 2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $(2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

(3)

$f(\theta)$ は、 $\cos\theta$ を用いて、

$$\begin{aligned}f(\theta) &= (2\sin\theta - \sin 2\theta)^2 \\ &= (2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= \{2\sin\theta(1 - \cos\theta)\}^2 \\ &= 4\sin^2\theta(1 - \cos\theta)^2 \\ &= 4(1 - \cos^2\theta)(1 - \cos\theta)^2\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $\cos\theta = B$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $-1 \leq B \leq 1$) とおき、

$$g(B) = 4(1 - B^2)(1 - B)^2$$

とする。

$$\begin{aligned}g'(B) &= 4 \cdot (-2B)(1 - B)^2 + 4(1 - B^2) \cdot 2(1 - B)(-1) \\ &= -8B(1 - B)^2 - 8(1 - B^2)(1 + B) \\ &= -8(1 - B)^2 \{B + (1 + B)\} \\ &= -8(1 - B)^2 (2B + 1)\end{aligned}$$

となるので、以下のような増減表が得られる。

B	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(B)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g(B)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

前表より、 $g(B)$ の最大値は

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\} \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \frac{27}{4}$$

である。さて、点 P の y 座標は $\pm\sqrt{g(B)}$ と表されるが、その最大値を求めるにあたっては

$\sqrt{g(B)} > -\sqrt{g(B)}$ より $\sqrt{g(B)}$ の最大値を考えれば十分である。前述の通り $g(B)$ の最大値は

$\frac{27}{4}$ であるから、点 P の y 座標の最大値は

$$\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

(答) $f(\theta) = 4(1 - \cos^2\theta)(1 - \cos\theta)^2$ 、最大値： $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

6

(1)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^n \log x dx \\
 &= [x \log x - x]_1^n \\
 &= n \log n - n + 1
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = n \log n - n + 1$

ここで $t = x + 1$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 1$ であり, x と t の対応関係は以下の表の通りとなる。

x	1	$\rightarrow$	n
t	2	$\rightarrow$	$n+1$

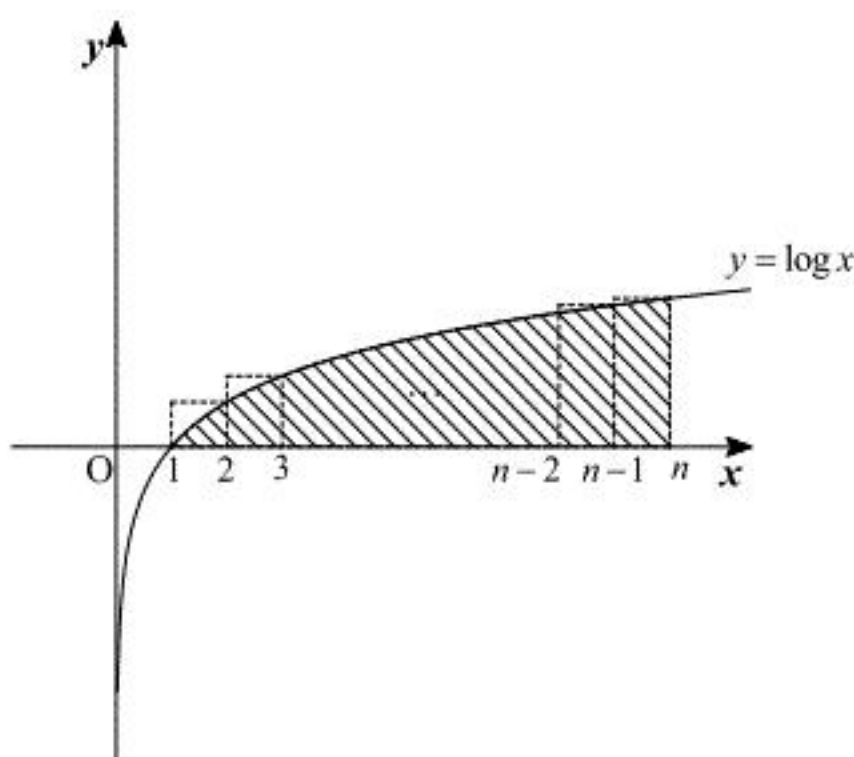
よって

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^n \log x dx \\
 &= \int_2^{n+1} \log(t-1) dt \\
 &= \int_2^{n+1} \log(x-1) dx
 \end{aligned}$$

となり, 題意は示される。

(証明終)

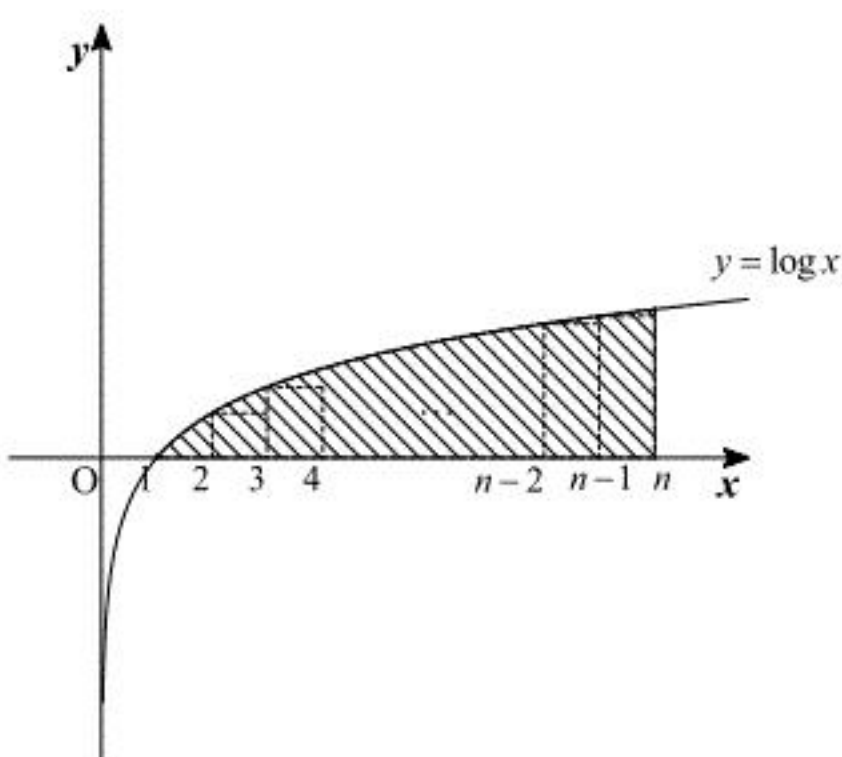
(2)



前図において, 斜線部分の面積と, 長方形で囲まれた部分の面積を比較すると

$$\begin{aligned}
 \int_1^n \log x dx &< \sum_{k=2}^n \log k \\
 \Leftrightarrow S + \log 1 &< \sum_{k=2}^n \log k + \log 1 \\
 \Leftrightarrow n \log n - n + 1 &< \sum_{k=1}^n \log k
 \end{aligned}$$

が得られる。また,



前図において, 斜線部分の面積と, 長方形で囲まれた部分の面積を比較すると

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{n-1} \log k &< \int_1^n \log x dx \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n-1} \log k + \log 1 + \log n &< S + \log 1 + \log n \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \log k &< (n+1) \log n - n + 1
 \end{aligned}$$

が得られる。以上より,

$$n \log n - n + 1 < \sum_{k=1}^n \log k < (n+1) \log n - n + 1$$

が成立する。

(証明終)

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}
 n \log n - n + 1 &< \sum_{k=1}^n \log k < (n+1) \log n - n + 1 \\
 \Leftrightarrow \log \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1 &< \log n! < \log \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1 + \log n \\
 \Leftrightarrow 1 &< \log n! - \log \left(\frac{n}{e} \right)^n < 1 + \log n \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{n} &< \frac{\log n! - \log \left(\frac{n}{e} \right)^n}{n} < \frac{1}{n} + \frac{\log n}{n}
 \end{aligned}$$

とわかる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\log n}{n} \right) = 0$$

となるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n! - \log \left(\frac{n}{e} \right)^n}{n} = 0$$

と求まる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n! - \log \left(\frac{n}{e} \right)^n}{n} = 0$$