

$a^x = t$ ($a > 0$) とおくと,

$$a^{2x} + 6a^{-x} > 7$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{6}{t} > 7$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 7t + 6 > 0 \quad (\because t > 0)$$

$$\Leftrightarrow (t+3)(t-1)(t-2) > 0$$

$$\therefore -3 < t < 1, 2 < t$$

となる。ここで、 $t > 0$ とあわせて t の範囲は,

$$0 < t < 1, 2 < t$$

となる。ここで、 a の値によって場合分けして考える。

[1] $0 < a < 1$ のとき

求める x の範囲は,

$$0 < t < 1, 2 < t$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^x < 1, 2 < a^x$$

$$\therefore x < \log_a 2, 0 < x$$

となる。

[2] $a = 1$ のとき

$t = a^x = 1$ より、 x は解なしとなる。

[3] $1 < a$ のとき

求める x の範囲は,

$$0 < t < 1, 2 < t$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^x < 1, 2 < a^x$$

$$\therefore x < 0, \log_a 2 < x$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、不等式 $a^{2x} + 6a^{-x} > 7$ の解は $0 < a < 1$ のとき $x < \log_a 2, 0 < x$, $a = 1$ のとき 解なし, $1 < a$ のとき $x < 0, \log_a 2 < x$ となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} x < \log_a 2, 0 < x & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (a = 1 \text{ のとき}) \\ x < 0, \log_a 2 < x & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)

$x = a(1 + \sin 2\theta)$ を倍角の公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} x &= a(1 + \sin 2\theta) \\ \Leftrightarrow x &= a(1 + 2\sin \theta \cos \theta) \\ \Leftrightarrow 2\sin \theta \cos \theta &= \frac{x}{a} - 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。また, $y = \sqrt{2}a(\cos \theta - \sin \theta)$ に三角関数の合成を用いることにより,

$$\begin{aligned} y &= -2a \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -2a \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq 0$ なので,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \leq 0 \\ \therefore 0 &\leq y \leq 2a \end{aligned}$$

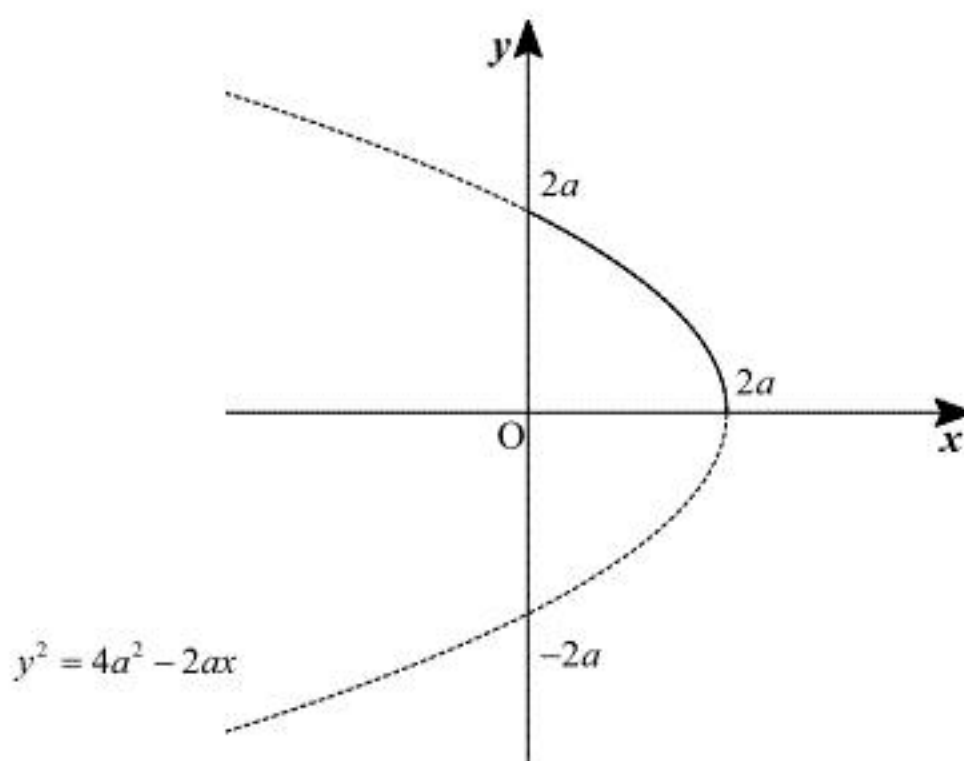
である。また,

$$\begin{aligned} 0 &\leq a(1 + \sin 2\theta) \leq 2a \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x \leq 2a \end{aligned}$$

である。よって, $y = \sqrt{2}a(\cos \theta - \sin \theta) \geq 0$ であるため, 両辺を2乗することにより,

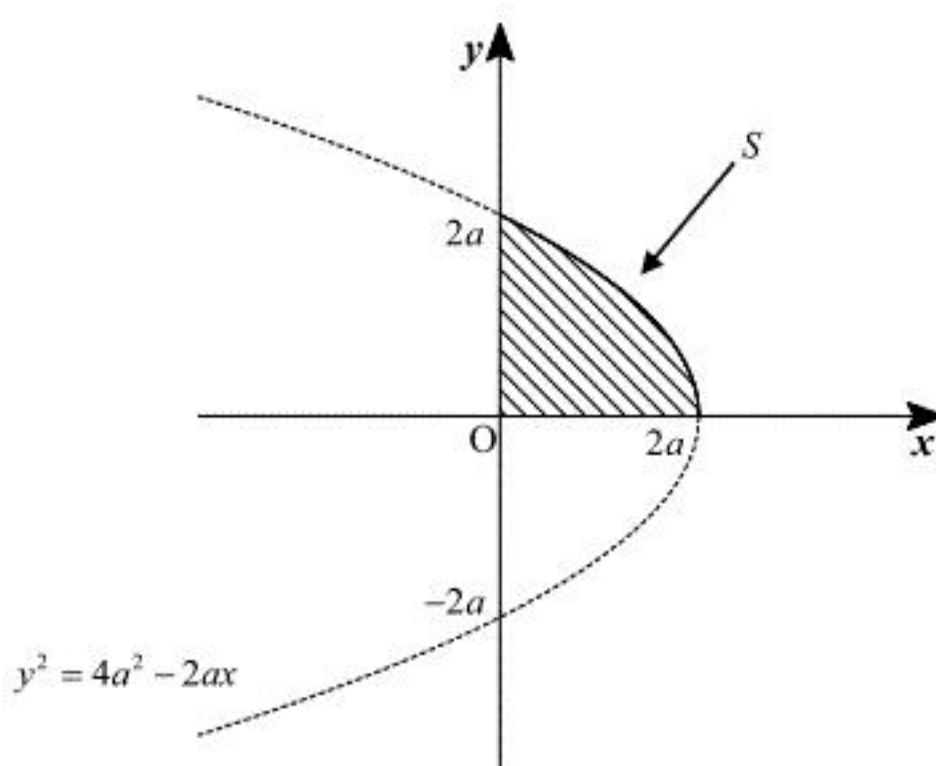
$$\begin{aligned} y^2 &= 2a^2 (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= 2a^2 (\cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 2a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right\} \left(\because 2\sin \theta \cos \theta = \frac{x}{a} - 1 \right) \\ &= 4a^2 - 2ax \end{aligned}$$

となる。これを図示すると, 下のような放物線の一部となる。



(答) $\begin{cases} x \text{ と } y \text{ の方程式: } y^2 = 4a^2 - 2ax \quad (0 \leq y \leq 2a) \\ \text{曲線 } C \text{ の図示: 上図の通り(ただし, 端点を含む)} \end{cases}$

(2)



求める体積 V は上図の斜線部 S を x 軸周りに1回転してできる立体の体積なので,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2a} y^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2a} (4a^2 - 2ax) dx \\ &= \pi \left[4a^2 x - ax^2 \right]_0^{2a} \\ &= 4a^3 \pi \end{aligned}$$

である。これが $\frac{\pi}{2}$ となるから,

$$\begin{aligned} 4a^3 \pi &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(1)

$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ を用いて順に計算すると,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - 2a_1 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2^2 - 2a_2 + 2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_3 = 17$

(2)

$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ を変形すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n^2 - 2a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= (a_n - 1)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= (a_n - 1)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2$$

$$\therefore \log_2(a_{n+1} - 1) = 2\log_2(a_n - 1)$$

となる。よって、数列 $\{\log_2(a_n - 1)\}$ は、公比 2、初項 $\log_2(a_1 - 1) = 1$ の等比数列である。よって、

$$\log_2(a_n - 1) = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n - 1 = 2^{2^{n-1}}$$

$$\therefore a_n = 2^{2^{n-1}} + 1$$

となる。

(答) $a_n = 2^{2^{n-1}} + 1$

(3)

漸化式 $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2$ を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 2 &= (a_{n+2} - 1) - 1 \\ &= (a_{n+1} - 1)^2 - 1 \\ &= a_{n+1}(a_{n+1} - 2) \\ &= a_{n+1}\{(a_{n+1} - 1) - 1\} \\ &= a_{n+1}\{(a_n - 1)^2 - 1\} \\ &= a_n a_{n+1}(a_n - 2) \end{aligned}$$

となるため、 $a_{n+2} - 2$ が a_n の倍数であることが示された。

(証明終)

(1)

$\delta = 2 - \sqrt{3}i$ とおく。このとき、 $\bar{\delta} = 2 + \sqrt{3}i$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\bar{\alpha}}{2 + \sqrt{3}i} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\delta}} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} &= \frac{\alpha \bar{\alpha}}{\delta \bar{\delta}} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} &= \frac{|\alpha|^2}{|\delta|^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} &= \frac{3}{7} \\ \therefore \frac{\beta - 0}{\delta - 0} &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

となり、 $\frac{\beta - 0}{\delta - 0}$ が実数となったため、3点 O, B, D は一直線上にあることが示された。

(証明終)

(2)

$\frac{\beta}{\delta} = \frac{3}{7}$ より、

$$\beta = \frac{3}{7}\delta$$

である。また、

$$\begin{aligned}\frac{2 - \sqrt{3}i}{\gamma} &= \frac{\bar{\alpha}}{2 + \sqrt{3}i} \\ \Leftrightarrow \frac{\delta}{\gamma} &= \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\delta}} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{\alpha \bar{\alpha}}{\delta \bar{\delta}} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{3}{7} \\ \therefore \alpha &= \frac{3}{7}\gamma\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{CD}{AB} &= \frac{|\delta - \gamma|}{|\beta - \alpha|} \\ &= \frac{|\delta - \gamma|}{\left| \frac{3}{7}\delta - \frac{3}{7}\gamma \right|} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7}{3}$

(3)

$\angle AOB = 90^\circ$ であるから、 $\frac{\alpha - 0}{\beta - 0}$ は純虚数であり、

$$\frac{\alpha}{\beta} = ki \quad (k \text{ は実数})$$

とおくことができる。すなわち、 $\alpha = \beta ki$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2 - \sqrt{3}i} &= \frac{\alpha}{\delta} \\ &= \frac{\beta ki}{\delta} \\ &= \frac{3}{7}ki \left(\because \frac{\beta}{\delta} = \frac{3}{7} \right)\end{aligned}$$

となる。すなわち純虚数であるから、 $\frac{\alpha}{2 - \sqrt{3}i}$ の実部は 0 である。

(答) 0

(1)

 $f(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\cos x(4 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(4 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos^2 x + 4\cos x + \sin^2 x}{(4 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 + 4\cos x}{(4 + \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

となる。 $f'(x)=0$ を解くと $\cos x = -\frac{1}{4}$ であり, $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ ($0 < \alpha < \pi$) とおくと, $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	(0)	...	α	...	(π)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	(0)		$\frac{\sqrt{15}}{15}$		(0)

よって, $f(x)$ の最大値は $x = \alpha$ のとき $\frac{\sqrt{15}}{15}$ をとる。

(答) $\frac{\sqrt{15}}{15}$

(2)

 $g(x)$ を微分すると,

$$g'(x) = f'(x) - a$$

であるから, $g(x)$ が極値を持つためには, $y = f'(x)$ と $y = a$ が交点を持てばよい。ただし, 接する場合は含まない。このとき, $f'(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-4\sin x(4 + \cos x)^2 - (1 + 4\cos x) \cdot 2(4 + \cos x)(-\sin x)}{(4 + \cos x)^4} \\
 &= \frac{2\sin x(2\cos x - 7)}{(4 + \cos x)^3} < 0
 \end{aligned}$$

となるから, $f'(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	(0)	...	(π)
$f''(x)$		-	
$f'(x)$	$\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{3}$

よって, $y = f'(x)$ と $y = a$ が交点を持つとき(接する場合は含まない),

$$-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{5}$$

である。

(答) $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{5}$