

(1)

$$\begin{aligned}
 f(3, 1) &= f(2+1, 0+1) \\
 &= f(2, 0)+1 \\
 &= f(2 \cdot 1, 2 \cdot 0)+1 \\
 &= 2f(1, 0)+1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
 f\left(-2, \frac{2}{3}\right) &= f\left(0-2, \frac{8}{3}-2\right) \\
 &= f\left(0, \frac{8}{3}\right)-2 \\
 &= f\left(\frac{8}{3}, 0\right)-2 \\
 &= \frac{8}{3}f(1, 0)-2 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$x \geq y$ より, $x-y \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x-y, 0)+y \\
 &= (x-y)f(1, 0)+y
 \end{aligned}$$

である。

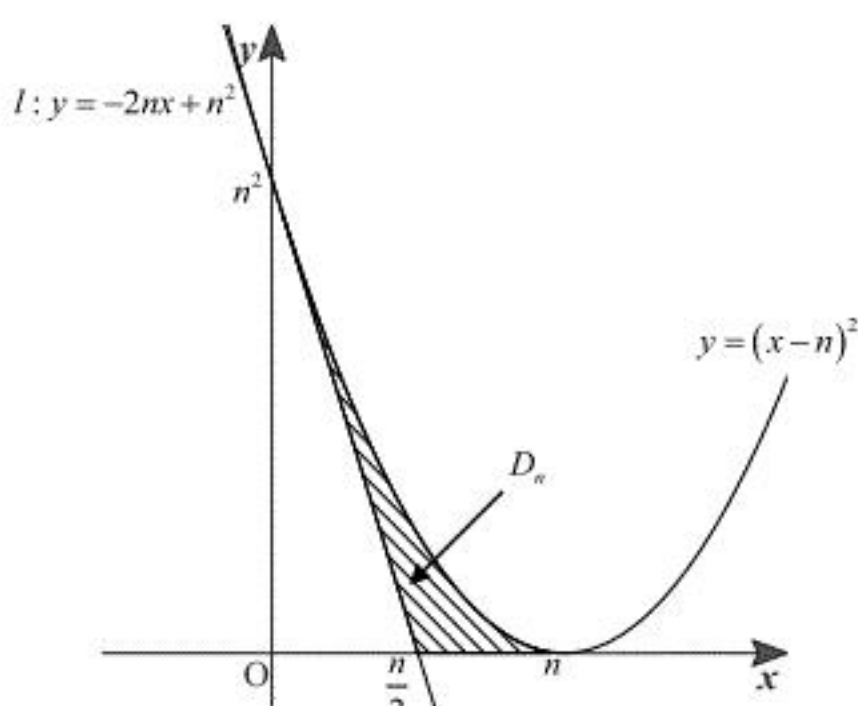
$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x-y+y \\
 &= x
 \end{aligned}$$

であることがわかる。また,

$$\begin{aligned}
 f(y, x) &= f(x, y) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

となる。これより題意は示された。

(証明終)



点 $(0, n^2)$ における放物線 C の接線を l とする。放物線 C の方程式を両辺 x で微分すると

$$y' = 2(x - n)$$

となるから、 l の方程式は、

$$y - n^2 = 2(0 - n)x$$

$$\Leftrightarrow y = -2nx + n^2$$

とわかる。 D_n に含まれる格子点の数を、 $\frac{n}{2}$ が整数になるときとならないとき、すなわち n が

偶数のときと奇数のときの2つの場合に分けて考える。

[1] n が偶数のとき

直線 $x = k$ 上にある D_n の格子点を数える。 $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ のとき、直線 $x = k$ 上にある D_n に含

まれる格子点の数は、 $(k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1$ (個)である。また、 $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n$ のときは

$(k - n)^2 + 1$ (個)である。ゆえに求める格子点の数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ (k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1 \right\} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n (-2nk + n^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=0}^n (-2nk + n^2) - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-2nk + n^2) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (k^2 + 1) &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + n + 1 \\ &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-2nk + n^2) - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-2nk + n^2) &= -2n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n^2(n+1) + 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - n^2 \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= -n^3 - n^2 + n^3 + n^2 + \frac{n^3}{4} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{2} - n^2 \\ &= -\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ (k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1 \right\} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n + 1 + \left(-\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{12} n^3 + \frac{7}{6} n + 1 \end{aligned}$$

である。

[2] n が奇数のとき

直線 $x = k$ 上にある D_n の格子点を数える。 $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ のとき、直線 $x = k$ 上にある格子

点の数は、 $(k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1$ (個)である。また、 $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$ のときは $(k - n)^2 + 1$

(個)である。ゆえに求める格子点の数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ (k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1 \right\} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n (-2nk + n^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k^2 + 1) + \sum_{k=0}^n (-2nk + n^2) - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-2nk + n^2) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-2nk + n^2) - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-2nk + n^2) &= -2n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n^2(n+1) + 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) - n^2 \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= -n^3 - n^2 + n^3 + n^2 + \frac{n^3}{4} - \frac{n}{4} - \frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{2} \\ &= -\frac{1}{4} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{4} n \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ (k - n)^2 - (-2nk + n^2) + 1 \right\} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^n \left\{ (k - n)^2 + 1 \right\} &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n + 1 + \left(-\frac{1}{4} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{4} n \right) \\ &= \frac{1}{12} n^3 + \frac{11}{12} n + 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n \text{ が偶数のとき: } \frac{1}{12} n^3 + \frac{7}{6} n + 1$$

$$n \text{ が奇数のとき: } \frac{1}{12} n^3 + \frac{11}{12} n + 1$$

(1)

Cの座標を (x, y, z) とする。Cから xy 平面に下ろした垂線の足を $H(x, y, 0)$ とすると、Hは $\triangle OAB$ の重心であるから、 x 座標は $\frac{1+2}{3}=1$ 、 y 座標は $\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。また、四面体OABCは正四面体であるから $OA^2=OC^2$ が成り立つ。これより

$$1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2 = 2^2$$

$$\therefore z = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\because z > 0)$$

である。

$$(\text{答}) \ C \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3} \right)$$

(2)

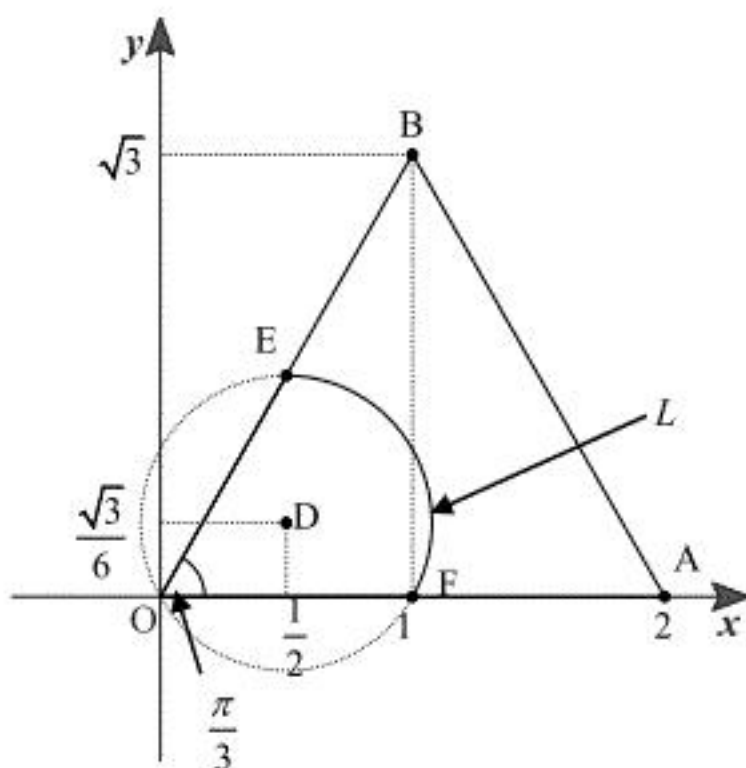
点Pの座標を $(p, q, 0)$ ($p \neq 0$ または $q \neq 0$) とおく。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CP}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CP} &= (p, q, 0) \cdot \left(p-1, q-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \\ &= p(p-1) + q \left(q-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(p-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(q-\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 $OP \perp CP$ より、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ であるから、 p, q は

$$\left(p-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(q-\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

を満たす。したがって、点Pは xy 平面において中心 $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円上の、 $\triangle OAB$ の周上あるいは内部にある部分を動き、図に表すと以下のようなになる。



E, FをそれぞれOA, OBと円の交点とする。軌跡 L は円の劣弧EFであるから、求めるのは劣弧EFの長さである。円周角の定理より、 $\angle EDF = 2\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

問題 A

(1)

$f(t)$ が極値を持つための必要十分条件は、 $f'(t)$ の判別式 D が常に正となることである。

$f(t) = kt^3 - 2kt^2 + (k+1)t$ であるから、 $f'(t)$ は

$$f'(t) = 3kt^2 - 4kt + k + 1$$

となる。したがって、 $f(t)$ が極値を持つための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (2k)^2 - 3k(k+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 3k &> 0 \\ \therefore k &> 3 \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $k > 3$

(2)

α, β は $f'(t) = 0$ の解である。解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{4k}{3k} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\alpha\beta = \frac{k+1}{3k}$$

となるから、 $k > 0$ より $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ である。これより $\alpha > 0, \beta > 0$ がわかる。また、 $f(t)$ は 3 次関数であるから、(極大値) $>$ (極小値) が成り立つ。よって、(極小値) $= f(\beta) > 0$ を示せば十分である。

$$\begin{aligned} f(\beta) &= k\beta^3 - 2k\beta^2 + (k+1)\beta \\ &= \beta \{ k(\beta-1)^2 + 1 \} \\ &> 0 \quad (\because \beta > 0) \end{aligned}$$

である。以上より、 $f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0$ が示された。

(証明終)

(3)

$C: y = 2x(x^2 - 1)$ と円 $x^2 + y^2 = a^2$ の交点の座標は、2 つの方程式を連立させて解くことで得られる。

$$\begin{aligned} x^2 + \{ 2x(x^2 - 1) \}^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow 4x^6 - 8x^4 + 5x^2 - a^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

この方程式の実数解の個数が曲線 C と円との交点の個数と一致する。ここで $s = x^2 (s \geq 0)$ とすると、

$$4s^3 - 8s^2 + 5s - a^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

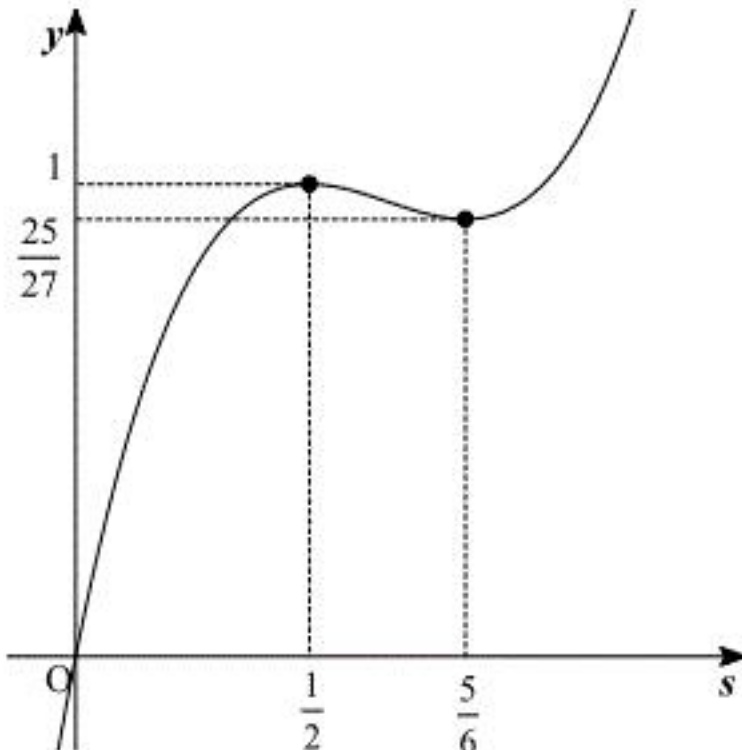
となり、この方程式の実数解は $y = 4s^3 - 8s^2 + 5s$ と $y = a^2$ の交点と一致する。ここで

$g(s) = 4s^3 - 8s^2 + 5s$ とすると

$$\begin{aligned} g'(s) &= 12s^2 - 16s + 5 \\ &= (2s-1)(6s-5) \end{aligned}$$

である。 $s = \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ のとき $g'(s) = 0$ となるから、増減表とグラフは以下のようになる。

s	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}$	$\cdots$
$g'(s)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(s)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{25}{27}$	$\nearrow$



ここで、①は最大で 6 個の異なる実数解をもつが、このとき②が異なる正の 3 実数解をもつ。

したがって、求める a の取り得る範囲は

$$\frac{25}{27} < a^2 < 1$$

であるから、 $a > 0$ を考えて、 $\frac{5\sqrt{3}}{9} < a < 1$ となる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{9} < a < 1$

問題 B

(1)

k 回目の操作をするとき ($k = 1, 2, \dots, n$)、赤い玉の個数は、 $n+1+k-1 = n+k$ (個)、合計の玉の数は、 $n+k+1$ (個) である。したがって、白い玉をとりださない、つまり毎回の操作で赤い玉をとりだす確率は、

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+1+1} \cdot \frac{n+2}{n+2+1} \cdots \frac{n+n}{n+n+1} &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n+3} \cdots \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{n+1}{2n+1}$

(2)

k 回目の操作のみ白い玉を取り出す確率は、

$$\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n+3} \cdots \frac{1}{n+k+1} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{n+1}{(2n+1)(n+k)}$$

である。 q_n はこれを $k=1$ から n まで足し合わせたものだから、

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{(2n+1)(n+k)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

となる。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(1+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} \log 2$

問題 A

(1)

$$\begin{aligned} d(O, P) &= |0-x| + |0-y| \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

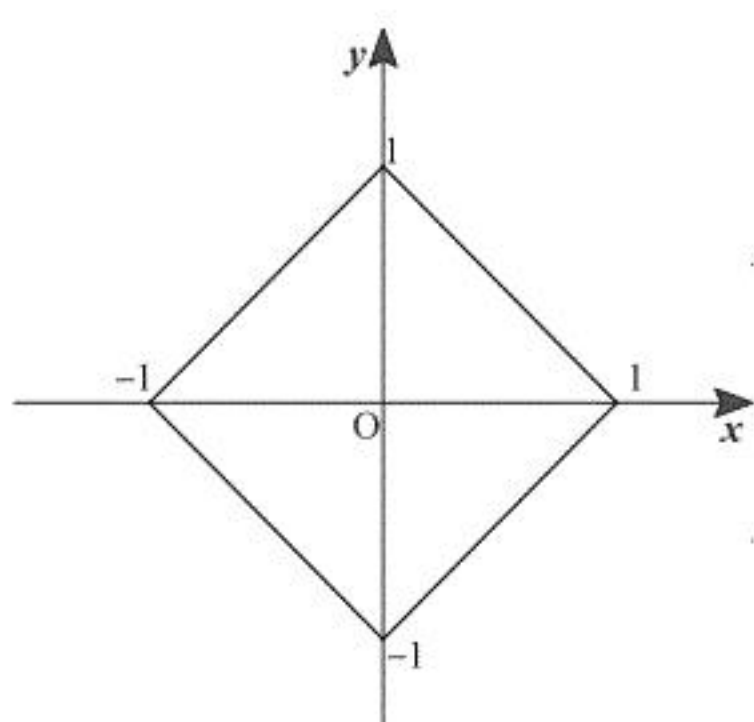
であるから、 $P(x, y)$ の存在領域は、 $|x| + |y| = 1$ である。 $f(x, y) = |x| + |y| - 1$ とすると、

$$\begin{cases} f(-x, y) = f(x, y) \\ f(x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

が成立するから、 $P(x, y)$ の存在領域は x 軸、 y 軸に関して対称であることがわかる。 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -x + 1 \end{aligned}$$

となる。対称性を利用して $P(x, y)$ の存在領域を図示すると以下のようになる。



(答) 上図

(2)

$$\begin{aligned} (1-t)d(O, P) &= td(A, P) \\ \Leftrightarrow (1-t)(|x| + |y|) - t(|x-1| + |y|) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y| = 0$$

である。 $(1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y|$ を y の関数とみて、 $g(y) = (1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y|$ とすると、

$$g(y) = g(-y)$$

が成立するから、 $P(x, y)$ の存在領域は、 x 軸に関して対称であることがわかる。以下、 $y \geq 0$ の条件で、 x の値に関して場合分けを行う。

[1] $x < 0$ のとき

$$(1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y| = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-t)x + t(x-1) + (1-2t)y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + \frac{t}{1-2t} \quad (\because t \neq \frac{1}{2}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、 $x < 0$ 、 $y \geq 0$ での $P(x, y)$ の存在領域は線分 $y = x + \frac{t}{1-2t}$ である。

[2] $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$(1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y| = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)x + t(x-1) + (1-2t)y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{1-2t} + \frac{t}{1-2t} \quad (\because t \neq \frac{1}{2}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるから、 $0 \leq x \leq 1$ 、 $y \geq 0$ での $P(x, y)$ の存在領域は線分 $y = -\frac{x}{1-2t} + \frac{t}{1-2t}$ である。

[3] $x > 1$ のとき

$$(1-t)|x| - t|x-1| + (1-2t)|y| = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)x - t(x-1) + (1-2t)y = 0$$

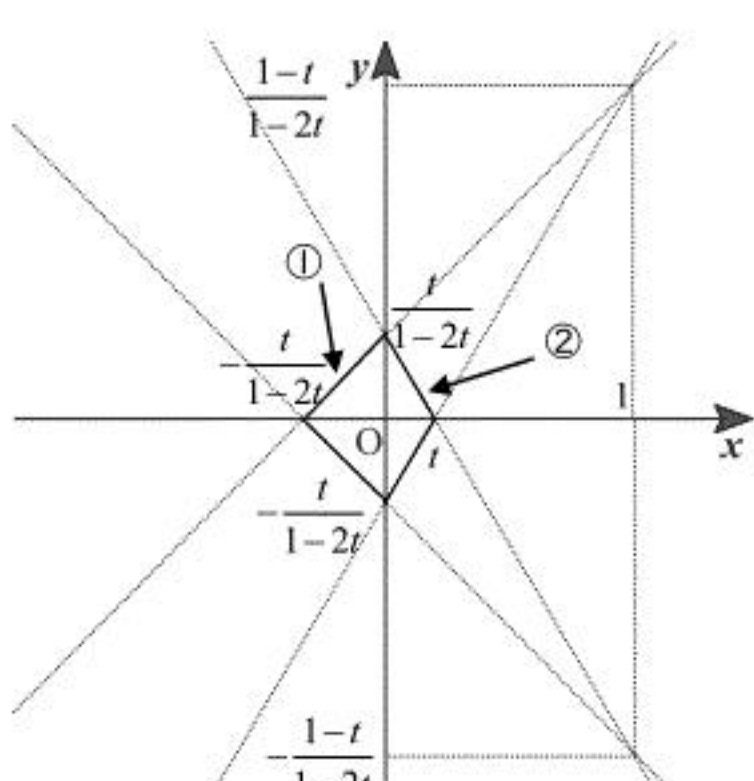
$$\Leftrightarrow y = -x - \frac{t}{1-2t} \quad (\because t \neq \frac{1}{2})$$

となる。ここで、 $x > 1$ のとき $0 < t < \frac{1}{2}$ より、

$$\begin{aligned} y &< -1 - \frac{t}{1-2t} \\ &< 0 \end{aligned}$$

となるから、 $x > 1$ 、 $y \geq 0$ において $P(x, y)$ の存在領域はない。

以上より、 $P(x, y)$ の存在領域は①、②とそれを x 軸に関して折り返したものを合わせた領域である。これを図示すると、以下の図のようになる。



(答) 上図(実線の線分上)

問題 B

(1)

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = 0$ が証明された。

(証明終)

(2)

$f(x) = (x-a)^{m+1}$ 、 $g(x) = (x-b)^{n+1}$ とする。ここで、 $f(x)$ 、 $g(x)$ は微分可能であり、

$f(a) = 0$ 、 $g(b) = 0$ を満たす。よって、 $f'(x) = (m+1)(x-a)^m$ 、 $g'(x) = (n+1)(x-b)^n$ であるから、

(1)の結果より

$$\begin{aligned} (m+1)A(m, n+1) + (n+1)A(m+1, n) &= (m+1) \int_a^b (x-a)^m (x-b)^{n+1} dx + (n+1) \int_a^b (x-a)^{m+1} (x-b)^n dx \\ &= \int_a^b (m+1)(x-a)^m (x-b)^{n+1} dx + \int_a^b (n+1)(x-a)^{m+1} (x-b)^n dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{1}{m+1} \left[(x-a)^{m+1} (x-b)^n \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} \cdot n(x-b)^{n-1} dx \\ &= -\frac{n}{m+1} A(m+1, n-1) \\ &= -\frac{n}{m+1} \cdot \left(-\frac{n-1}{m+2} \right) A(m+2, n-2) \\ &= -\frac{n}{m+1} \cdot \left(-\frac{n-1}{m+2} \right) \cdots \left(-\frac{1}{m+n} \right) A(m+n, 0) \end{aligned}$$

となる。 $A(m+n, 0)$ は、

$$\begin{aligned} A(m+n, 0) &= \int_a^b (x-a)^{m+n} (x-b)^0 dx \\ &= \frac{1}{m+n+1} \left[(x-a)^{m+n+1} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{m+n+1} (b-a)^{m+n+1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A(m, n) &= -\frac{n}{m+1} \cdot \left(-\frac{n-1}{m+2} \right) \cdots \left(-\frac{1}{m+n} \right) \cdot \frac{1}{m+n+1} (b-a)^{m+n+1} \\ &= (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)