

(1)

9枚のカードから同時に3枚を選ぶ選び方は

$${}_9C_3 = 84$$

より84通りであり、これらは同様に確からしい。「 X が偶数である」ことの余事象は「 X が奇数である」となる。 X が奇数である場合は、1, 3, 5, 7, 9の中から3枚のカードを選ぶときなので、

$${}_5C_3 = 10$$

より10通りである。よって、 X が奇数である確率は

$$\frac{10}{{}_9C_3} = \frac{5}{42}$$

となり、 X が偶数の確率は

$$1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

である。

(答) $\frac{37}{42}$

(2)

「 X が3の倍数である」ことの余事象は「 X が3の倍数でない」となる。 X が3の倍数にならない場合は、1, 2, 4, 5, 7, 8の中から3枚のカードを選ぶときであるので

$${}_6C_3 = 20$$

より20通りである。よって、 X が3の倍数にならない確率は

$$\frac{20}{{}_9C_3} = \frac{5}{21}$$

となり、 X が3の倍数である確率は

$$1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

である。

(答) $\frac{16}{21}$

(3)

「 X が6の倍数である」ことの余事象は「 X が6の倍数でない」となる。 X が偶数である事象をA、 X が3の倍数である事象をBとすると、 X が6の倍数とならない事象は $\overline{A \cap B}$ である。ここで、事象Aが起こる確率を $P(A)$ とおくと、(1)と(2)より

$$\begin{cases} P(\overline{A}) = \frac{5}{42} \\ P(\overline{B}) = \frac{5}{21} \end{cases}$$

を得る。また、 $P(\overline{A \cap B})$ について、 $\overline{A \cap B}$ とは X が偶数でないかつ3の倍数でない事象であることから、 $P(\overline{A \cap B})$ は1, 5, 7の中から3枚のカードを選ぶ確率であるので

$$P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$$

となる。よって X が6の倍数とならない確率である $P(\overline{A \cap B})$ は

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A \cap B}) \\ &= \frac{5}{42} + \frac{5}{21} - \frac{1}{84} \\ &= \frac{29}{84} \end{aligned}$$

である。したがって X が6の倍数である確率は

$$1 - \frac{29}{84} = \frac{55}{84}$$

となる。

(答) $\frac{55}{84}$

(4)

「 X が4の倍数である」ことの余事象は「 X が4の倍数でない」となる。ここで、 X が4の倍数とならない場合は「奇数のカードを3枚選ぶ場合」または「偶数のカードを1枚と奇数のカード2枚を選ぶ場合」である。よって X が4の倍数とならない場合は、1, 3, 5, 7, 9の中から3枚のカードを選ぶ

$${}_5C_3 = 10$$

の10通りと、2, 6の中から1枚、1, 3, 5, 7, 9の中から2枚のカードを選ぶ

$${}_2C_1 \cdot {}_5C_2 = 20$$

の20通りの和の30通りである。よって X が4の倍数とならない確率は

$$\frac{30}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$$

となる。したがって X が4の倍数である確率は

$$1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

である。

(答) $\frac{9}{14}$

(1)

 $x^2 + 1 > 0$ より

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 - x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (x^2 + 1)(1 - x^2 + x^4)$$

であるのでこれを示せばよい。ここで、 $(x^2 + 1)(1 - x^2 + x^4) = x^6 + 1$ であり、 $x^6 \geq 0$ であること

から $1 \leq (x^2 + 1)(1 - x^2 + x^4)$ が示された。したがって

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 - x^2 + x^4$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおく。このとき、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、積分範囲は

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{\pi}{6}$

(3)

(1)の不等式の両辺を0から $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲で積分すると、(2)の結果より

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2 + 1} \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - x^2 + x^4) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{41}{135} \sqrt{3}$$

$$\therefore \pi \leq \frac{82}{45} \sqrt{3}$$

である。ここで $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$ より

$$\frac{82}{45} \cdot 1.732 < \frac{82}{45} \sqrt{3} < \frac{82}{45} \cdot 1.733$$

$$\therefore 3.156 < \frac{82}{45} \sqrt{3} < 3.158$$

となる。上の2つの式より

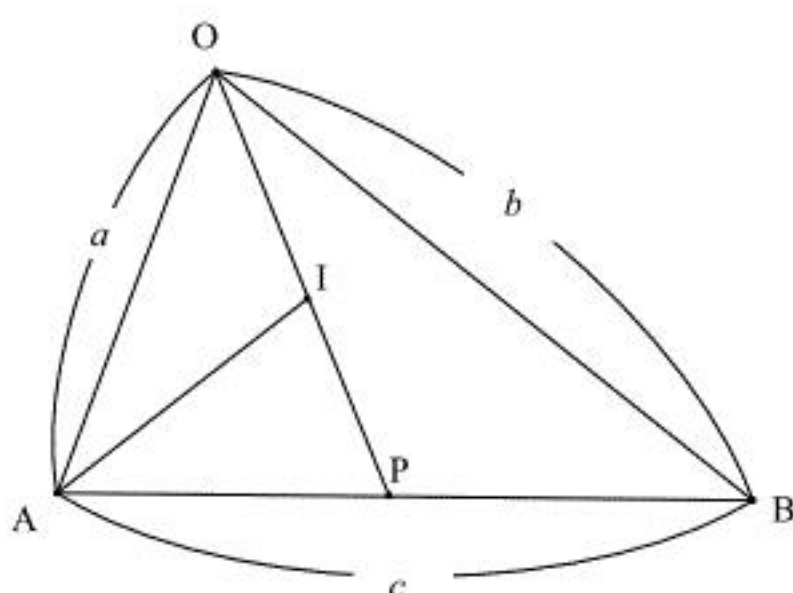
$$\pi \leq \frac{82}{45} \sqrt{3} < 3.16$$

を得る。よって円周率 π は3.16より小さい。

(証明終)

(1)

直線 OI と線分 AB の交点を P とし、 $\triangle OAB$ と点 I, P を図示すると下図を得る。



OP は $\angle AOB$ の二等分線であるから、

$$AP:PB = a:b$$

であるので

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a\overrightarrow{OB} + b\overrightarrow{OA}}{a+b}$$

となる。また、 $AP:PB = a:b$ より、 AI は $\angle OAP$ の二等分線であるから、

$$\begin{aligned} AP &= \frac{a}{a+b} \cdot c \\ &= \frac{ac}{a+b} \end{aligned}$$

である。したがって

$$OI:IP = OA:AP = a:\frac{ac}{a+b} = (a+b):c$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{a+b}{a+b+c} \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{OB}$$

(2)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$$

であるから、 $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OG}$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{OG} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} &= \frac{4}{9} \overrightarrow{OA} + \frac{4}{9} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立であるので、(1) と上の式より

$$\begin{cases} \frac{b}{a+b+c} = \frac{4}{9} \\ \frac{a}{a+b+c} = \frac{4}{9} \end{cases}$$

を得る。これを解くと

$$a = b = 4c$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = b = 4c$$

(1)

$\sin x \sin y = \frac{1}{4}$ より $\sin y \neq 0$ であるので、 $\sin y$ で両辺を割ると

$$\sin x = \frac{1}{4 \sin y}$$

となる。また $\sin y \neq 0$ より $-1 \leq \sin y < 0, 0 < \sin y \leq 1$ であるから、上の式と合わせると

$$\frac{1}{4 \sin y} \leq -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4 \sin y}$$

$$\therefore \sin x \leq -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq \sin x$$

を得る。ここで $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるので

$$-1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq \sin x \leq 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq \sin x \leq 1$$

(2)

t を整理すると

$$\begin{aligned} t &= \cos 2x + 8 \cos 2y \\ &= (1 - 2 \sin^2 x) + 8(1 - 2 \sin^2 y) \\ &= 9 - \left(2 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad (\because \sin x \neq 0) \end{aligned}$$

となる。 $\sin^2 x = X$ とおくと、(1)より

$$\frac{1}{16} \leq X \leq 1$$

である。また

$$t = 9 - \left(2X + \frac{1}{X} \right)$$

である。 $f(X) = 9 - \left(2X + \frac{1}{X} \right)$ とおくと

$$f'(X) = -2 + \frac{1}{X^2}$$

を得る。ここで $f'(X) = 0$ なのは $\frac{1}{16} \leq X \leq 1$ より $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。このとき、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 9 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) \\ &= 9 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。したがって $\frac{1}{16} \leq X \leq 1$ の $f(X)$ の増減表は次のようになる。

X	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(X)$		+	0	-	
$f(X)$	$-\frac{57}{8}$	$\nearrow$	$9 - 2\sqrt{2}$	$\searrow$	6

よって、 $f(X)$ は、 $X = \frac{1}{16}$ のとき最小値 $-\frac{57}{8}$ をとり、 $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $9 - 2\sqrt{2}$ をとる。

したがって t は、 $\sin^2 x = \frac{1}{16}$ のとき最小値 $-\frac{57}{8}$ をとり、 $\sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $9 - 2\sqrt{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \sin^2 x = \frac{1}{16} \text{ のとき最小値 } -\frac{57}{8}, \sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最大値 } 9 - 2\sqrt{2}$$

(1)

$y=x^2$ を微分すると

$$y' = 2x$$

となる。よって P, Q における接線の方程式は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$$

$$y - \beta^2 = 2\beta(x - \beta)$$

となり、これを整理すると

$$y = 2\alpha x - \alpha^2$$

$$y = 2\beta x - \beta^2$$

を得る。これが点 R を通るので

$$\begin{cases} t = 2\alpha s - \alpha^2 & \cdots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 2\beta s - \beta^2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。①と②の両辺の差をとると

$$0 = 2s(\alpha - \beta) - \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Leftrightarrow 2s(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\therefore s = \frac{\alpha + \beta}{2} (\because \alpha \neq \beta)$$

となる。これと①より

$$t = 2\alpha \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha^2$$

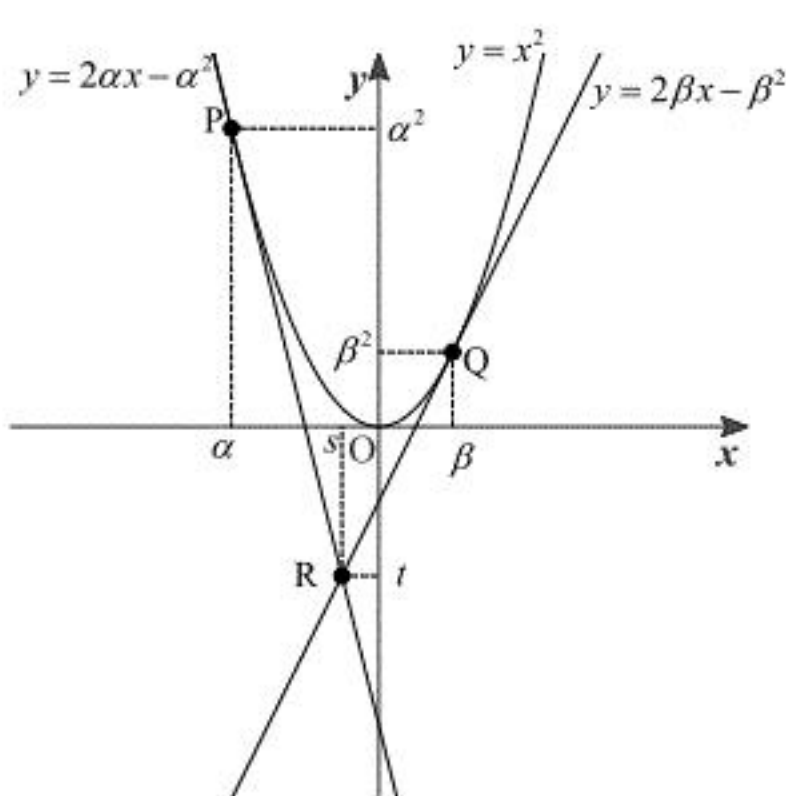
$$\therefore t = \alpha\beta$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{\alpha + \beta}{2}, t = \alpha\beta$$

(2)

放物線 C, 点 P, Q, R, 点 P と Q における接線を図示すると下図のようになる。



それぞれの座標から

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} \\ &= (\beta - \alpha)\sqrt{1 + (\alpha + \beta)^2} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right)^2 + (\alpha\beta - \alpha^2)^2} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{\left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + (\beta^2 - \alpha\beta)^2} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{1 + 4\beta^2}}{2} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

となる。これらを用いると、余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{PR^2 + QR^2 - PQ^2}{2PR \cdot QR} \\ &= -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}\sqrt{1 + 4\beta^2}} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}\sqrt{1 + 4\beta^2}}$$

(3)

点 R が直線 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 上を動くとき、(1)より

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = s \\ \alpha\beta = t \\ t = \frac{1}{2}s - 1 \end{cases}$$

となる。またこのとき

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4s^2 - 2t \\ &= 4s^2 - s + 2 \end{aligned}$$

である。これらを(2)の式に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}\sqrt{1 + 4\beta^2}} \\ &= -\frac{1 + 4\alpha\beta}{\sqrt{1 + 4(\alpha^2 + \beta^2) + 16\alpha^2\beta^2}} \\ &= -\frac{1 + 4\left(\frac{1}{2}s - 1\right)}{\sqrt{1 + 4(4s^2 - s + 2) + 16\left(\frac{1}{2}s - 1\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2s - 3}{\sqrt{4s^2 - 4s + 5}} \end{aligned}$$

である。 $f(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2s - 3}{\sqrt{4s^2 - 4s + 5}}$ とすると

$$\begin{aligned} f'(s) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{4s^2 - 4s + 5} - (2s - 3) \cdot \frac{1}{2}(4s^2 - 4s + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8s - 4)}{4s^2 - 4s + 5} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2(4s^2 - 4s + 5) - \frac{1}{2}(8s - 4)(2s - 3)}{(4s^2 - 4s + 5)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4(2s + 1)}{(4s^2 - 4s + 5)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

を得る。 $f'(s) = 0$ となるのは $s = -\frac{1}{2}$ のときであるので、 $f(s)$ の増減表は次のようになる。

s	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$	$+$	0	$-$
$f(s)$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{10}}{5}$	$\searrow$

以上より、 $f(s)$ が $s = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ をとるとき、 $\cos \theta$ も最大値 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ をとり、このとき θ

は最小となる。 $s = -\frac{1}{2}$ のとき $t = -\frac{5}{4}$ であるので、このときの点 R の座標は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$