

平成31年度入学試験問題

数 学

社会情報科学部(中期)

注意事項

1. 試験監督の指示があるまで、この問題冊子と解答冊子は開かないでください。
2. 問題は [1] から [3] および、[4] A, [4] B, [5] A, [5] B の計7題あります。
3. [1] ~ [3] にはすべて解答してください。
4. [4] および [5] は、各々問題 A, B のいずれかを選択し解答してください。
5. 解答用紙は5枚です。
6. 各解答用紙には氏名および受験番号の記入欄があります。試験監督の指示に従い、すべての記入欄(氏名、受験番号各々5箇所)に記入してください。
7. 選択問題 [4] および [5] の解答の際、該当解答用紙の問題番号の右にある選択問題記入欄 A・B では、選択した問題に応じて A, B いずれかの文字を○で囲んでください。
8. 解答は解答用紙の裏面には記入しないでください。
9. 解答用紙の裏面は計算用紙として使って構いません。
10. 解答時間は120分です。
11. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

中期日程 (社会情報科学部) (120 分)

1 (配点率 20%)

実数の組 (x, y) をある実数に対応させる関数 $f(x, y)$ は次の (ア) ~ (エ) の条件をすべて満たす.

(ア) 任意の実数 x, y について, $f(x, y) = f(y, x)$.

(イ) 任意の実数 x, y, p について, $f(x + p, y + p) = f(x, y) + p$.

(ウ) 任意の実数 x, y と, 0 以上の任意の実数 a について, $f(ax, ay) = af(x, y)$.

(エ) $f(1, 0) = 1$.

以下の問に答えなさい.

(1) $f(3, 1) = 3$, $f(-2, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ を示しなさい.

(2) 関数 $f(x, y)$ は, 2 つの実数 x, y のうちの最大のものを対応させること, すなわち, $x \geq y$ ならば $f(x, y) = x$ および $f(y, x) = x$ が成り立つことを示しなさい.

2 (配点率 20%)

自然数 n に対して, 放物線 $C: y = (x - n)^2$ と x 軸および, 点 $(0, n^2)$ を通る C の接線とで囲まれる部分, これに境界線を合わせた領域を D_n とする. このとき, 領域 D_n に含まれる格子点の個数を求めなさい. ただし, 座標平面において x 座標と y 座標がともに整数である点 (x, y) のことを格子点という.

3 (配点率 20%)

xyz 座標空間において, 原点 O , 点 $A(2, 0, 0)$, 点 $B(1, \sqrt{3}, 0)$, そして, 点 C が正四面体の頂点となっている. ただし, 点 C の z 座標は正である. 次の問に答えなさい.

(1) 点 C の座標を求めなさい.

(2) $\triangle OAB$ の周上あるいは内部にあって, $OP \perp CP$ を満たす点 P の軌跡 L の長さを求めなさい. ただし, $P \neq O$ とする.

【選択問題】 4 および 5 では、問題 A, B のうち一方を選択し解答しなさい。また、解答用紙 4 枚目および 5 枚目では、問題番号欄右の A・B のうち、選択問題に該当する文字を○印で囲むこと。

4 (配点率 20%) 次の問題 A, B から一方を選び答えなさい。

問題 A 実数 $k > 0$ に対して、 t の 3 次関数 $f(t)$ を $f(t) = kt^3 - 2kt^2 + (k+1)t$ と定める。以下の問に答えなさい。

- (1) 関数 $f(t)$ が極値をもつための k が満たすべき必要十分条件を求めなさい。
- (2) 実数 α, β に対して、関数 $f(t)$ が $t = \alpha$ で極大値を、 $t = \beta$ で極小値をとるとする。このとき、 $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ 、および、 $f(\alpha) > 0$ かつ $f(\beta) > 0$ であることを示しなさい。
- (3) 3 次曲線 $C: y = 2x(x^2 - 1)$ と円 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) との交点の個数が最大となるときの、 a が取り得る値の範囲を求めなさい。

問題 B n を自然数とする。箱の中に $n+1$ 個の赤い玉と 1 個の白い玉、計 $n+2$ 個の玉が入っている。このとき、以下の一連の操作 (ア) ~ (ウ) を n 回繰り返す。

- (ア) 箱の中から玉を 1 個無作為に取り出す。
- (イ) 取り出した玉を箱に戻す。
- (ウ) 箱の中に赤い玉を 1 個追加する。

以下の問に答えなさい。

- (1) 白い玉を 1 回も取り出さない確率を n を用いて表しなさい。
- (2) 白い玉をちょうど 1 回取り出す確率を q_n とするとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めなさい。

5 (配点率 20%) 次の問題 A, B から一方を選び答えなさい.

問題 A 座標平面における任意の 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ の離れ具合を表す関数を次で定義する.

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

点 $O(0, 0)$, 点 $A(1, 0)$ が与えられているとき, 次の問に答えなさい.

(1) $d(O, P) = 1$ を満たす $P(x, y)$ の存在範囲を図示しなさい.

(2) 定数 t ($0 < t < \frac{1}{2}$) に対して,

$$(1 - t)d(O, P) = td(A, P)$$

を満たす $P(x, y)$ の存在範囲を図示しなさい.

問題 B 任意の実数 a, b および 0 以上の任意の整数 m, n に対して,

$$A(m, n) = \int_a^b (x - a)^m (x - b)^n dx$$

と定義する. 次の問に答えなさい.

(1) 関数 $f(x), g(x)$ は微分可能で, $f(a) = 0$ および $g(b) = 0$ を満たすとする. このとき, 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = 0.$$

(2) $(m + 1)A(m, n + 1) + (n + 1)A(m + 1, n)$ を求めなさい.

(3) $A(m, n)$ について次が成り立つことを示しなさい.

$$A(m, n) = (-1)^n \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (b - a)^{m+n+1}.$$

