1 同一直線上にない3点をO，A，Bとする。Aを通り直線OBに垂直な直線上に点Cをとり，Bを通り直線OAに垂直な直線上に点Dをとる。このとき，ベクトルの内積に関して，次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$

2 2つの数列$\{a_n\}$と$\{S_n\}$を次のように定める。$a_1 = 1$とし，xが$0 < x < a_n$の範囲を動くとき，座標平面上の4点$(a_n, 0)$，$(x, 0)$，(x, x^2)，(a_n, x^2)を結んでできる長方形の面積が最大となるxをa_{n+1}，そのときの面積をS_nとする。次の各問に答えよ。

(1) a_{n+1}をa_nを用いて表せ。

(2) S_{n+1}をS_nを用いて表せ。

(3) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$を求めよ。

3 mを1以上の定数とする。放物線 $C : y = -m(x^2 - 6x + 9)$ と直線 $l : y = mx$ について，次の各問に答えよ。

(1) 放物線 C に接し，傾きが m となる直線の方程式を求めよ。

(2) l 上の点Pと C 上の点Qの距離PQの最小値 a を m を用いて表せ。

(3) a が $\frac{11}{6} < a < \frac{11}{4}$ を満たすことを示せ。

4 自然数 n に対して，$a_n = 2^n + 3^n + 1$ とおくとき，次の各問に答えよ。

(1) $a_{n+6} - a_n$ は 7 で割り切れることを示せ。

(2) n が 6 の倍数のとき，a_n は 7 で割り切れないことを示せ。

(3) a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ。