

**1**

同一直線上にない3点を  $O, A, B$  とする。 $A$  を通り直線  $OB$  に垂直な直線上に点  $C$  をとり、 $B$  を通り直線  $OA$  に垂直な直線上に点  $D$  をとる。このとき、ベクトルの内積に関して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

2

2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{S_n\}$ を次のように定める。 $a_1 = 1$ とし、 $x$ が $0 < x < a_n$ の範囲を動くとき、座標平面上の4点 $(a_n, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, x^2)$ ,  $(a_n, x^2)$ を結んでできる長方形の面積が最大となる $x$ を $a_{n+1}$ , そのときの面積を $S_n$ とする。次の各問に答えよ。

- (1)  $a_{n+1}$  を  $a_n$  を用いて表せ。
- (2)  $S_{n+1}$  を  $S_n$  を用いて表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$  を求めよ。

**3**

関数  $y = ax \cos x + (\log |\sin x|) \sin x$  が

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} + \sin x$$

を満たすように、定数  $a$  の値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

4 曲線  $C: y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  と直線  $l: y = \frac{1}{3}x$  について、次の各問に答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の凹凸，漸近線を調べ，そのグラフをかけ。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $l$  の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  と直線  $l$  で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。