

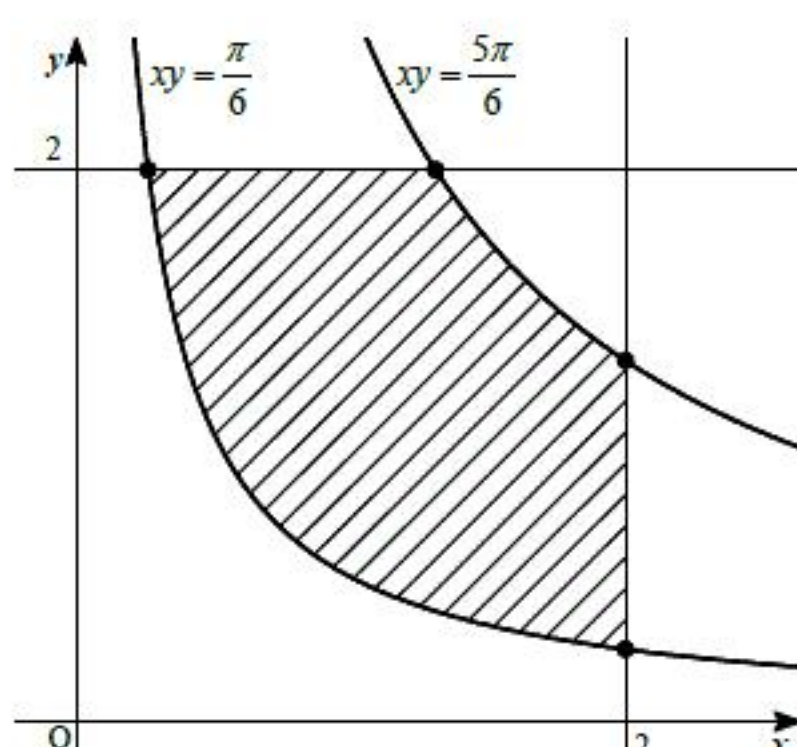
1

(1)

$$\frac{1}{2} \leq \sin(xy)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq xy \leq \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

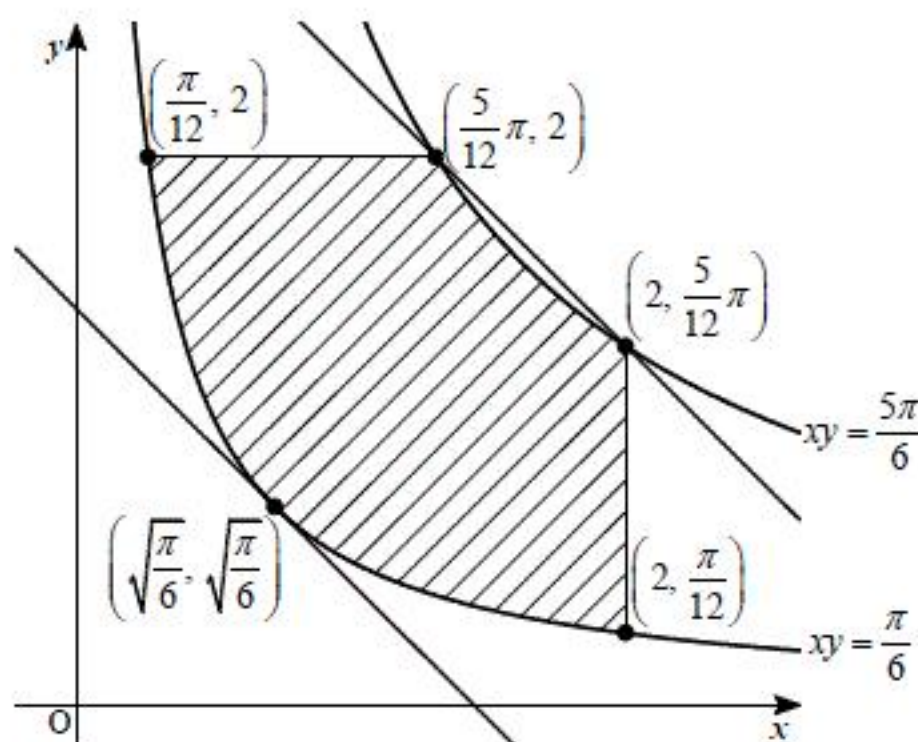
である。ここで、 $0 \leq x \leq 2$ 、 $0 \leq y \leq 2$ より $0 \leq xy \leq 4$ であることから、 $\textcircled{1}$ において $n=0$ の場合を考える。よって、領域 D は下図の斜線部である。ただし、境界線は含む。



(答) 前図

(2)

$x+y=k$ とおくと、点 (x, y) が領域 D を動くときの $x+y$ の値の範囲は、直線 $x+y=k$ と領域 D が共有点を持つときの k の値の範囲に対応する。ここで、 k は直線 $x+y=k$ の y 切片であることに注意する。



領域 D と共有点を持つような直線 $x+y=k$ の y 切片について

最大となるのは、直線 $x+y=k$ が点 $(2, \frac{5}{12}\pi)$ 、 $(\frac{5}{12}\pi, 2)$ を通るとき

最小となるのは、直線 $x+y=k$ が $xy = \frac{\pi}{6}$ と接するとき

である。

[1] 直線 $x+y=k$ が点 $(2, \frac{5}{12}\pi)$ 、 $(\frac{5}{12}\pi, 2)$ を通るとき

$$k = 2 + \frac{5}{12}\pi$$

となる。

[2] 直線 $x+y=k$ が $xy = \frac{\pi}{6}$ と接するとき

$x+y=k$ と $xy = \frac{\pi}{6}$ の交点の x 座標を解にもつ方程式

$$x(-x+k) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - kx + \frac{\pi}{6} = 0$$

が重解をもつ。この方程式の判別式を D_1 とおくと

$$D_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-k)^2 - 4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{2}{3}\pi$$

となる。 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ より $k = x+y \geq 0$ であるから

$$k = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}$$

である。

以上、[1]、[2]より $x+y(=k)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} \leq x+y \leq 2 + \frac{5}{12}\pi$$

である。

$$0 < \frac{\sqrt{6\pi}}{3} < \frac{\pi}{2}, \pi < 2 + \frac{5}{12}\pi < \frac{3}{2}\pi$$

であることに注意すると、 $\sin(x+y)$ は

$$(x, y) = \left(2, \frac{5}{12}\pi\right), \left(\frac{5}{12}\pi, 2\right) \text{ のとき、最小値 } \sin\left(2 + \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、最大値 } 1$$

をとる。

$$\text{(答)} \quad (x, y) = \left(2, \frac{5}{12}\pi\right), \left(\frac{5}{12}\pi, 2\right) \text{ のとき} \quad \text{最小値 } \sin\left(2 + \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

最大値 1

2

(1)

曲線 $C: y = |x|(|x| - 1)$ について

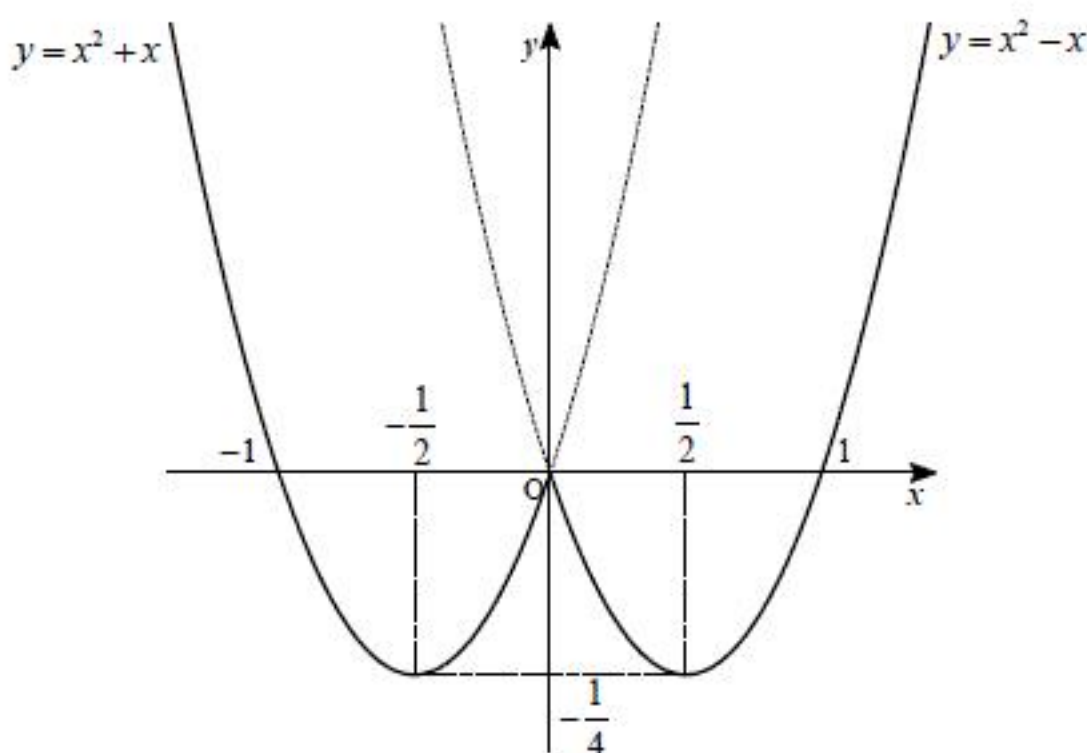
$$\begin{aligned} y &= |x|(|x| - 1) \\ &= x^2 - |x| \end{aligned}$$

であるから曲線 C の方程式は

$$x \geq 0 \text{ のとき, } y = x^2 - x$$

$$x < 0 \text{ のとき, } y = x^2 + x$$

となる。よって曲線 C の概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= k(x+1) \\ &= kx + k \end{aligned}$$

とかける。 l と C の囲む図形のうち、 $x \leq 0$ の部分の面積を S_1 、 $x \geq 0$ の部分の面積を S_2 とおく。 $k > 0$ のとき、 $x < 0$ における l と C の交点は明らかに点 $A(-1, 0)$ のみであるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^0 (kx + k - x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k-1}{2}x^2 + kx \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{k}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となり、 $S_1 = \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。次に、 $x > 0$ における l と C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} kx + k &= x^2 - x \\ \Leftrightarrow x^2 - (k+1)x - k &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+1)(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となるため、 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^2 \left\{ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - (x^2 - x) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x \right]_0^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 y 軸の右側の面積は 2 である。

(答) $k = \frac{2}{3}$, y 軸の右側の面積: 2

(1)

直線 OA は x 軸と一致するため、点 $P(p, 1)$ と直線 OA の距離は 1 である。これは $\triangle OAB$ の内接円の半径に一致するため、この中心 $P(p, 1)$ 、半径 1 である内接円の方程式は

$$(x-p)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかける。直線 OB の傾きを k_1 とおくと、この直線の方程式は $y = k_1 x$ とかける。①の円と直線 OB は接するから、点 P と直線 OB の距離は 1 となり

$$\begin{aligned} \frac{|k_1 p - 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (k_1 p - 1)^2 &= k_1^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (p^2 - 1)k_1^2 - 2k_1 p &= 0 \\ \Leftrightarrow k_1 \{(p^2 - 1)k_1 - 2p\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、点 B は x 軸上の点でないことから $k_1 \neq 0$ であり、また、 $p = \pm 1$ は上の式を満たさないことから

$$p \neq \pm 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

のもとで

$$\begin{aligned} k_1 \{(p^2 - 1)k_1 - 2p\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p^2 - 1)k_1 - 2p &= 0 \\ \Leftrightarrow k_1 &= \frac{2p}{p^2 - 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k_1 = \frac{2p}{p^2 - 1}$$

(2)

直線 AB の傾きを k_2 とおくと、この直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= k_2(x - 4) \\ \Leftrightarrow k_2 x - y - 4k_2 &= 0 \end{aligned}$$

とかける。①の円と直線 AB は接するから、点 P と直線 AB の距離は 1 となり

$$\begin{aligned} \frac{|k_2 p - 1 - 4k_2|}{\sqrt{k_2^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (k_2 p - 1 - 4k_2)^2 &= k_2^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (p^2 - 8p + 15)k_2^2 - 2(p - 4)k_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k_2 \{(p - 3)(p - 5)k_2 - 2(p - 4)\} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、点 A は x 軸上の点であるが、点 B は x 軸上の点でないことから $k_2 \neq 0$ であり、また、 $p = 3, 5$ は上の式を満たさないことから

$$p \neq 3, 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

のもとで

$$\begin{aligned} k_2 \{(p - 3)(p - 5)k_2 - 2(p - 4)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - 3)(p - 5)k_2 - 2(p - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow k_2 &= \frac{2p - 8}{p^2 - 8p + 15} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k_2 = \frac{2p - 8}{p^2 - 8p + 15}$$

(3)

点 $(p, 0)$ において、線分 OA と内接円が接するから

$$0 < p < 4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。このとき、 $k_1, k_2 \neq 0$ である。点 B は直線 OA: $y = k_1 x$ と直線 AB: $y = k_2(x - 4)$ の交点であるから、その y 座標は

$$\begin{aligned} y &= k_2 \left(\frac{y}{k_1} - 4 \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) y &= 4 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{p^2 - 1}{2p} - \frac{p^2 - 8p + 15}{2p - 8} \right) y &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{p^2 - 4p + 1}{p(p - 4)} y &= 2 \end{aligned}$$

を満たす。ここで

$$\begin{aligned} p^2 - 4p + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

のとき、上の式を満たす y の値は存在せず、点 B が存在しないので $p \neq 2 \pm \sqrt{3}$ である。これより、点 B の y 座標は

$$y = \frac{2p(p - 4)}{p^2 - 4p + 1}$$

となる。また、点 B の y 座標は内接円上の点の y 座標 ($0 \leq y \leq 2$) より大きいから、 $y > 2$ である。よって

$$\begin{aligned} y - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2p(p - 4)}{p^2 - 4p + 1} - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{p^2 - 4p + 1} &> 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 4p + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < p < 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、④と合わせて、実数 p のとりうる値の範囲は

$$2 - \sqrt{3} < p < 2 + \sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 - \sqrt{3} < p < 2 + \sqrt{3}$$

(1)

$1.41^2 = 1.9881, 1.42^2 = 2.0164$ であるから

$$(0 <) 1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

$$\Leftrightarrow 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ であることから

$$100.11 < 71\sqrt{2} < 100.82$$

$$98.7 < 70\sqrt{2} < 99.4$$

となる。よって

$$70\sqrt{2} < 100 < 71\sqrt{2}$$

となるから、 $\sqrt{2}n$ の整数部分 a について $a \geq 100$ となる n の値の範囲は $n \geq 71$ である。

(答) $n \geq 71$

(3)

命題「 $n \leq 35$ ならば $b > 0.01$ となる」を背理法を用いて示す。 $k \leq 35$ である自然数 k で、 $n = k$ のとき $b \leq 0.01$ となるものが存在すると仮定する。この k について $b = \sqrt{2}k - a$ から

$$a \leq \sqrt{2}k \leq a + 0.01$$

が成り立つ。各辺は正であるので辺々を2乗して

$$a^2 \leq 2k^2 \leq a^2 + 0.02a + 0.0001 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $\sqrt{2} < 1.42$ であることから

$$a \leq \sqrt{2}k < 1.42k \leq 1.42 \cdot 35 = 49.7 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②から

$$a^2 \leq 2k^2 < a^2 + 0.02 \cdot 49.7 + 0.0001 < a^2 + 1$$

である。ここで a, k は自然数であるから

$$a^2 = 2k^2$$

となる。しかし

$$a^2 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}k$$

となり、これは a, k は自然数であることに矛盾する。よって、仮定は誤りであり、命題は示された。

(証明終)