

1

(1)

$f(x) = x \log x$ について

$$f'(x) = \log x + 1$$

となる。 $x > 1$ において $\log x > 0$ より、 $f'(x) > 0$ となるため、関数 $f(x)$ は $x > 1$ で単調増加する。

(証明終)

(2)

$g(x) = \frac{\log(x+2)}{\log x}$ について

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1}{x+2} \log x - \frac{1}{x} \log(x+2)}{(\log x)^2} \\ &= \frac{x \log x - (x+2) \log(x+2)}{x(x+2)(\log x)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで $x > 1$ のとき $x(x+2)(\log x)^2 > 0$ である。また(1)の結果より $x > 1$ において関数

$f(x) = x \log x$ は単調増加するから、

$$\begin{aligned} x+2 &> x \\ \Leftrightarrow f(x+2) &> f(x) \\ \Leftrightarrow (x+2) \log(x+2) &> x \log x \\ \Leftrightarrow x \log x - (x+2) \log(x+2) &< 0 \end{aligned}$$

となる。よって $x > 1$ で $g'(x) < 0$ となるから、関数 $g(x)$ は $x > 1$ で単調減少する。

(証明終)

(3)

$g(x) = \frac{\log(x+2)}{\log x}$ を用いて

$$\begin{aligned} \log_{11} 13 &= \frac{\log 13}{\log 11} \\ &= g(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{13} 15 &= \frac{\log 15}{\log 13} \\ &= g(13) \end{aligned}$$

とかける。ここで(2)の結果より $x > 1$ において $g(x)$ は単調減少するから

$$\begin{aligned} g(11) &> g(13) \\ \Leftrightarrow \log_{11} 13 &> \log_{13} 15 \end{aligned}$$

である。

(答) $\log_{11} 13 > \log_{13} 15$

[2]

(1)

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -E \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} A^{2k} &= (-E)^k \\ &= (-1)^k E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{2k+1} &= A^{2k} \cdot A \\ &= (-1)^k A \end{aligned}$$

である。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} A^{2k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、仮定より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} A^{2k+1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから

$$x_{2k+1} = x_{2k}$$

であることが示された。

(証明終)

(3)

$k \geq 1$ に対して(2)の結果より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} A^{2k} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{9}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから

$$x_{2k+1} = x_{2k-1} + 2 \left(-\frac{4}{9}\right)^k$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_{2k+1} = x_{2k-1} + 2 \left(-\frac{4}{9}\right)^k$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$x_1 = x_0 = 2$$

である。(3)の結果より

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= \sum_{i=1}^k (x_{2i+1} - x_{2i-1}) + x_1 \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \left(-\frac{4}{9}\right)^i + 2 \\ &= -\frac{8}{9} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^k}{1 + \frac{4}{9}} + 2 \\ &= -\frac{8}{13} \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^k \right\} + 2 \end{aligned}$$

であり、(2)の結果より $x_{2k+1} = x_{2k}$ であることから

$$\begin{cases} x_{2k} = -\frac{8 \cdot \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^k \right\}}{13} + 2 \\ x_{2k+1} = -\frac{8 \cdot \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^k \right\}}{13} + 2 \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} \\ &= -\frac{8}{13} + 2 \\ &= \frac{18}{13} \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{18}{13}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{18}{13}$$

(1)

 $y = ax^2 + bx + c$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (\because b^2 - 4ac < 0)$$

となるから

$$I(a, b, c) = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

である。よって $I(a, b, c)$ は b に関して単調減少であり、 $a > 0$ より c に関して単調増加であるから

$$I(a, b, c) \leq I(a, 1, 9)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I(a, b, c) \leq I(a, 1, 9)$$

(2)

(1)より、 a を定数として $I(a, b, c)$ を b, c の関数とみたとき、 $1 \leq b \leq 9, 1 \leq c \leq 9$ における最大値は $I(a, 1, 9)$ である。 $I(a, 1, 9) > 0$ であることから、 $\{I(a, 1, 9)\}^2$ が最大値をとるとき $I(a, 1, 9)$ も最大値をとる。

$$\begin{aligned} \{I(a, 1, 9)\}^2 &= \frac{36a - 1}{4a^2} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{36}{a} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} - 18 \right)^2 + 81 \end{aligned}$$

となるから、 $\{I(a, 1, 9)\}^2$ は $a = 1$ のとき最大値をとる。よって、 $I(a, b, c)$ を最大とする組

 (a, b, c) は

$$(a, b, c) = (1, 1, 9)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b, c) = (1, 1, 9)$$

(3)

$I(a, b, c) (> 0)$ が整数のとき、 $I(a, b, c) = n$ (n は自然数) とおける。式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} &= n \\ \Leftrightarrow 2an &= \sqrt{4ac - b^2} \\ \Leftrightarrow 4a^2n^2 &= 4ac - b^2 \quad (\because a > 0, n > 0) \\ \Leftrightarrow 4a(an^2 - c) &= -b^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $-b^2 < 0$ から $4a(an^2 - c) < 0$ であり、 $a > 0$ とあわせて

$$\begin{aligned} an^2 - c &< 0 \\ \Leftrightarrow an^2 &< c \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。 $1 \leq a, c \leq 9$ であるから、上式を満たしうる n の値は $n = 0, 1, 2$ のみがある。 $n = 2$ となる整数の組 (a, b, c) が存在すると仮定すると、②より $4a < c$ である。 $1 \leq a, c \leq 9$ であるから、この式を満たしうる整数 a の値は $a = 1, 2$ のみがある。

[1] $a = 1$ のとき

式①は

$$\begin{aligned} 16 &= 4c - b^2 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 4c - 16 \end{aligned}$$

となるから、 b は偶数である。また、 $1 \leq c \leq 9$ であることから $b \leq 20$ となるため、 $1 \leq b \leq 9$ において条件を満たしうる b の値は $b = 2, 4$ がある。よって、式①から $b = 2$ のとき $c = 5$ 、 $b = 4$ のとき $c = 8$ となる。

[2] $a = 2$ のとき

式②より

$$c > 2 \cdot 2^2 = 8$$

であるから $1 \leq c \leq 9$ と合わせて、式②を満たしうる c の値は $c = 9$ のみである。よって、式①より $b^2 = 8$ となるが、これを満たす整数 b は存在しない。よって、この場合は不適である。

以上[1], [2]より、 $I(a, b, c)$ が整数となる組 (a, b, c) のうちで、 $I(a, b, c)$ が最大となるものは、 $(a, b, c) = (1, 2, 5), (1, 4, 8)$ である。

$$(\text{答}) \quad (a, b, c) = (1, 2, 5), (1, 4, 8)$$