

1

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MH} \\ &= k\vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\ &= (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}) + 2\overrightarrow{MH} \\ &= -(1-k)\vec{a} + 2\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OH} = k\vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{AB} = -(1-k)\vec{a} + 2\vec{c}$

(2)

△OMHと直線ABについてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{NH}{ON} \cdot \frac{BM}{HB} \cdot \frac{AO}{MA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{NH}{ON} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1-k} &= 1 \\ \Leftrightarrow NH &= \frac{1-k}{2} ON\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}OH &= ON - NH \\ &= \left(1 - \frac{1-k}{2}\right) ON \\ &= \frac{1+k}{2} ON\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}ON &= \frac{2}{1+k} OH \quad (\because 1+k \neq 0) \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2}{1+k}\end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha = \frac{2}{k+1}$

(3)

OA=1であるから

$$|\vec{a}| = 1 \quad \dots\dots ①$$

である。また、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{MH}$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \dots\dots ②$$

である。ここで、 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k\vec{a} + \vec{c}) \cdot \{-(1-k)\vec{a} + 2\vec{c}\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -k(1-k)|\vec{a}|^2 + 2|\vec{c}|^2 &= 0 \quad (\because ②) \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= \frac{k(1-k)}{2} \quad (\because ①) \\ \Leftrightarrow |\vec{c}| &= \sqrt{\frac{k(1-k)}{2}} \quad (\because 0 < k < 1) \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

である。

(答) $|\vec{c}| = \sqrt{\frac{k(1-k)}{2}}$

(4)

$|\overrightarrow{MA}| = 1-k$ であり、 $\angle OAB = 60^\circ$ であることから

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{3}(1-k)$$

である。よって

$$|\vec{c}| = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-k) \quad \dots\dots ④$$

となる。③、④より

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k) &= \sqrt{\frac{k(1-k)}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}(1-k)^2 &= \frac{k(1-k)}{2} \quad (\because 0 < k < 1) \\ \Leftrightarrow 5k^2 - 8k + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(5k-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{5} \quad (\because 0 < k < 1)\end{aligned}$$

である。また、このとき

$$\begin{aligned}\frac{HN}{OH} &= \alpha - 1 \\ &= \frac{1-k}{k+1} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $k = \frac{3}{5}, \frac{HN}{OH} = \frac{1}{4}$

(1)

$l: y = mx + 1$ 上の点 P の座標を $P(t, mt+1)$ とおく。 Q の座標を (x, y) とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} at + (a+1)(mt+1) \\ -t - (mt+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ma+a+m)t + a+1 \\ -(m+1)t - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。点 Q が常に直線 l 上に存在するとき、 t の値によらず

$$\begin{aligned} -(m+1)t - 1 &= m\{(ma+a+m)t + a+1\} + 1 \\ \Leftrightarrow \{m(ma+a+m) + (m+1)\}t + m(a+1) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m(ma+a+m) + (m+1) = 0 \\ m(a+1) + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2(a+1) + m(a+1) + 1 = 0 \\ m(a+1) + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2m - 2 + 1 = 0 \\ ma = -m - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{m+2}{m} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ a = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m = -\frac{1}{2}, a = 3$$

(2)

$l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ 上の点 P の座標を $P(2s, -s+1)$ とおく。このとき Q の座標は $(2s+4, -s-1)$ とかける。 $\triangle OPQ$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |2s \cdot (-s-1) - (-s+1) \cdot (2s+4)| \\ &= \frac{1}{2} |-4| \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり、常に一定の値をとることが示され、その値は2である。

(証明終)

(答) 面積の値: 2

線分 OA は x 軸に一致するため、中心が $(p, 1)$ である円 C_p と線分 OA が接するとき、その接点は $(p, 0)$ である。この接点は点 O、点 A を除く線分 OA 上の点であるから、 p は $0 < p < 4$ を満たす。点 O を通り x 軸に平行でない直線を $l_0: my = x$ とおく。この直線が円 C_p と接するとき、直線 l_0 と円 C_p の中心 $(p, 1)$ の距離が 1 であるから

$$\begin{aligned}\frac{|p-m|}{\sqrt{1+m^2}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-m)^2 &= 1+m^2 \\ \Leftrightarrow p^2-1 &= 2pm \\ \Leftrightarrow m &= \frac{p^2-1}{2p} \quad (\because p \neq 0)\end{aligned}$$

となる。次に、点 A を通り x 軸に平行でない直線を $l_A: ny = x-4$ とおく。この直線が円 C_p と接するとき、直線 l_A と円 C_p の中心 $(p, 1)$ の距離が 1 であるから

$$\begin{aligned}\frac{|p-n-4|}{\sqrt{1+n^2}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-n-4)^2 &= 1+n^2 \\ \Leftrightarrow p^2-8p+15 &= (2p-8)n \\ \Leftrightarrow n &= \frac{p^2-8p+15}{2p-8} \quad (\because p \neq 4)\end{aligned}$$

となる。直線 l_0, l_A の交点が領域 $y > 0$ にあるとき、円 C_p は OA を一辺とする三角形の内接円となりうる。直線 l_0, l_A の交点の y 座標について

$$\begin{aligned}ny &= my - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{p^2-8p+15}{2p-8}y &= \frac{p^2-1}{2p}y - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{-4p^2+16p-4}{p(p-4)}y &= -8 \\ \Leftrightarrow \frac{p^2-4p+1}{p(p-4)}y &= 2\end{aligned}$$

を得るが、 $p^2-4p+1=0$ は上式を満たさないから

$$y = \frac{p(p-4)}{p^2-4p+1}$$

となる。これが 0 より大きいことから

$$\frac{p(p-4)}{p^2-4p+1} > 0$$

となる。両辺に $(p^2-4p+1)^2$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned}p(p-4)(p^2-4p+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow p\{p-(2-\sqrt{3})\}\{p-(2+\sqrt{3})\}(p-4) &> 0 \\ \Leftrightarrow p < 0, 2-\sqrt{3} < p < 2+\sqrt{3}, p > 4\end{aligned}$$

を得る。これと $0 < p < 4$ を合わせて、求める p の範囲は

$$2-\sqrt{3} < p < 2+\sqrt{3}$$

である。

関数 $\log_2 y = \log_2 (7-x) - \log_4 (5-x)$ について、真数条件より $y > 0, 5 < x$ である。

(1)

$x < 5$ を満たす $x=1$ のとき

$$\begin{aligned}\log_2 y &= \log_2 6 - \log_4 4 \\ &= \log_2 6 - \log_2 2 \\ &= \log_2 3\end{aligned}$$

となるから

$$y = 3$$

であり、これは真数条件 $y > 0$ を満たす。

(答) $y = 3$

(2)

$$\begin{aligned}\log_2 y &= \log_2 (7-x) - \log_4 (5-x) \\ \Leftrightarrow \log_2 y &= \log_2 (7-x) - \frac{\log_2 (5-x)}{\log_2 4} \\ \Leftrightarrow \log_2 y &= \log_2 (7-x) - \frac{\log_2 (5-x)}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 y &= \log_2 (7-x) - \log_2 (5-x)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{7-x}{\sqrt{5-x}}\end{aligned}$$

を得る。 $y > 0$ であるから、 y^2 が最小値をとるとき、 y も最小値をとる。よって

$$f(x) = y^2 = -\frac{(x-7)^2}{x-5} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{2(x-7)(x-5) - (x-7)^2}{(x-5)^2} \\ &= -\frac{(x-7)(x-3)}{(x-5)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $x < 5$ における $f(x)$ の増減は以下の通り。

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	8	$\nearrow$	

よって $f(x) (= y^2)$ の最小値は $x=3$ のとき 8 となり、 y の最小値は

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

である。

(答) $2\sqrt{2} (x=3)$

(3)

この関数のグラフと直線 $y=3$ の交点の x 座標は、①式に $y=3$ を代入して

$$\begin{aligned}3^2 &= -\frac{(x-7)^2}{x-5} \\ \Leftrightarrow 9(x-5) &= -(x-7)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 4\end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ の最小値は $2\sqrt{2} (< 3)$ であるから

$$\begin{aligned}f(x) &> 3 \quad (x < 1, 4 < x) \\ f(x) &\leq 3 \quad (1 \leq x \leq 4)\end{aligned}$$

となる。よって、求める面積は

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(3 - \frac{7-x}{\sqrt{5-x}} \right) dx &= \int_1^4 \left(3 - \sqrt{5-x} - \frac{2}{\sqrt{5-x}} \right) dx \\ &= \left[3x + \frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{5-x} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$