平成 20 年度前期日程入学試験問題

# 数　　学　C

## 理　学　部

### 注意事項

① 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

③ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

# 数　　学　$C$

**1**　次の各問に答えよ。ただし，$\log x$ は $x$ の自然対数を表す。

(1)　関数 $f(x)=x\log x$ は，$x>1$ で増加することを示せ。

(2)　関数 $g(x)=\dfrac{\log(x+2)}{\log x}$ は，$x>1$ で減少することを示せ。

(3)　$\log_{11}13$ と $\log_{13}15$ の大小を比較せよ。

**2**　$x_0=2$，$y_0=0$ とし，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ $(n\geqq 1)$ を次の式により定める。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\left(\frac{2}{3}\right)^n A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ただし，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$E$ を2次の単位行列とする。整数 $k\geqq 1$ に対して，$A^{2k}=(-1)^kE$，$A^{2k+1}=(-1)^kA$ を示せ。

(2)　整数 $k\geqq 0$ に対して，$x_{2k+1}=x_{2k}$ を示せ。

(3)　整数 $k\geqq 1$ に対して，$x_{2k+1}$ を $x_{2k-1}$ で表せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

**3** 正の実数 $a$ に対して，

$$f(a)=\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{a}+a\sin x\right)^2 dx$$

とする。次の各問に答えよ。

(1) $f(a)$を求めよ。

(2) $a$ の関数$f(a)$の最小値を求めよ。

**4** 次の条件を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$を考える。

$$1\leqq a\leqq 9,\quad 1\leqq b\leqq 9,\quad 1\leqq c\leqq 9,\quad b^2-4ac<0$$

このような組$(a,\ b,\ c)$に対して２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解の虚部の絶対値を$I(a,\ b,\ c)$とおく。ただし，複素数$\alpha+\beta i$($\alpha$, $\beta$は実数，$i$は虚数単位)の虚部とは，実数$\beta$のことである。次の各問に答えよ。

(1) $I(a,\ b,\ c)$と$I(a,\ 1,\ 9)$の大小を比較せよ。

(2) $I(a,\ b,\ c)$が最大となる組$(a,\ b,\ c)$を求めよ。

(3) $I(a,\ b,\ c)$が整数になる組$(a,\ b,\ c)$のうちで，$I(a,\ b,\ c)$が最大となるものをすべて求めよ。