

(1)

数列 $\{a_n\}$ は等差数列より、 $a_n = an + c$ とおく。 $(a$ および c は実数)

このとき、

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^n (ak + c)}{n} = \frac{a \frac{n(n+1)}{2} + cn}{n} = \frac{a}{2}n + \frac{a}{2} + c$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

(証明終)

(2)

数列 $\{b_n\}$ は等差数列より、 $b_n = bn + d$ とおく。 $(b$ および c は実数)

このとき、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nb_n = bn^2 + dn \quad (n \geq 1) \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = (n+1)b_{n+1} = b(n+1)^2 + d(n+1) \quad (n \geq 0) \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より、

$$a_{n+1} = 2bn + b + d \quad (n \geq 1)$$

つまり、

$$a_n = 2bn + d - b \quad (n \geq 2) \cdots \textcircled{3}$$

また、

$$a_1 = b_1 = b + d$$

なので、 $\textcircled{3}$ は $n=1$ でも成り立つ。

よって、数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

(証明終)

(3)

(2) より $\{a_n\}$ も等差数列である。

そこで

$$a_n = an + c$$

とおくと、

$$b_n = \frac{a}{2}n + \frac{a}{2} + c$$

よって

$$b_{2k-1} = ak + c$$

$$b_{2k} = ak + \frac{a}{2} + c$$

であり、条件の式から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} b_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} (ak + c) \\ &= a \frac{10 \cdot 11}{2} + 10c = 20 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 11a + 2c = 4 \cdots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} b_{2k} &= \sum_{k=1}^{10} \left(ak + \frac{a}{2} + c \right) \\ &= a \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 \left(\frac{a}{2} + c \right) = 10 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6a + c = 1 \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ を連立させて解くと、

$$\begin{cases} a = -2 \\ c = 13 \end{cases}$$

よって数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -2n + 13$$

(答) $a_n = -2n + 13$

(1)

 C_1 の方程式について,

$$y' = 8x$$

よって C_1 の, 点 $(a, 4a^2)$ における接線の方程式は,

$$y - 4a^2 = 8a(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = 8ax - 4a^2$$

これが C_2 と接するので, 方程式

$$8ax - 4a^2 = x^2 + 6x$$

$$x^2 - 2(4a - 3)x + 4a^2 = 0$$

が重解を持つ。よってこの方程式の判別式を D として,

$$\frac{D}{4} = (4a - 3)^2 - 4a^2$$

$$= 3(2a - 1)(2a - 3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

 $a_1 < a_2$ より,

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$$

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$$

(2)

 C_1, C_2 の交点の x 座標は $4x^2 = x^2 + 6x$ を解いて,

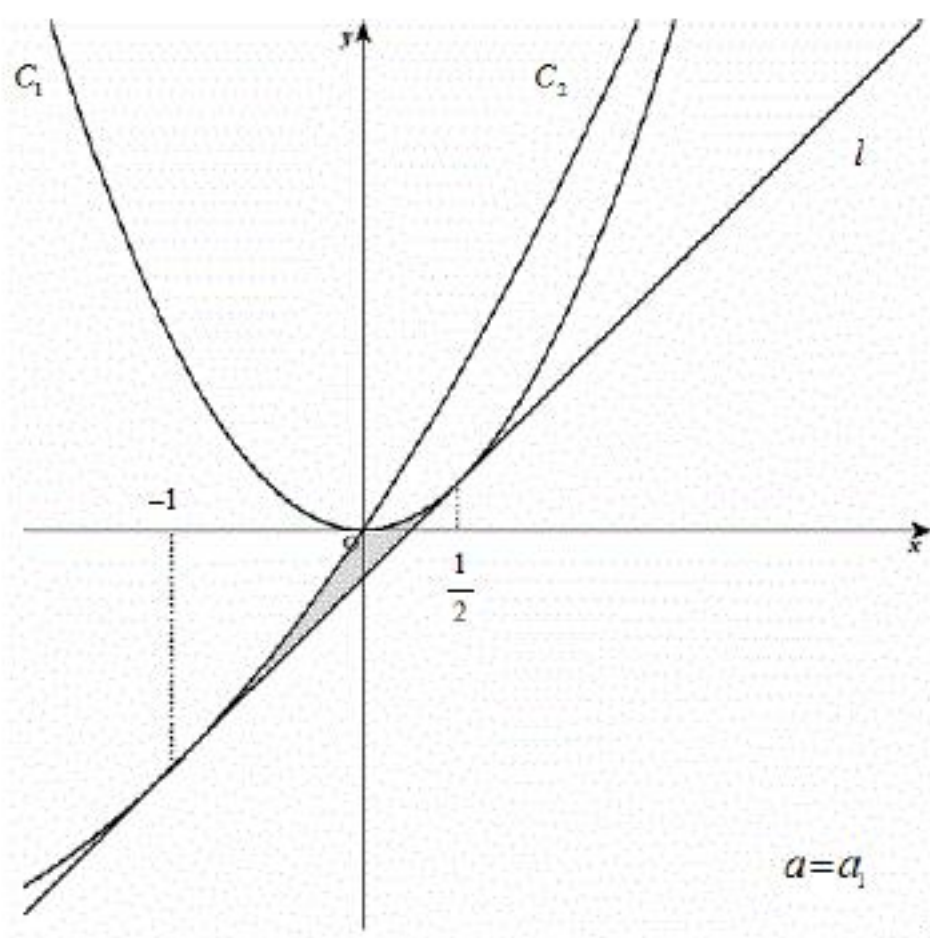
$$x = 0, 2$$

(i) $a = a_1$ のとき, l と C_1 の交点の x 座標は $4x^2 = 4x - 1$ を解いて,

$$x = \frac{1}{2}$$

 l と C_2 の交点の x 座標は $x^2 + 6x = 4x - 1$ を解いて,

$$x = -1$$

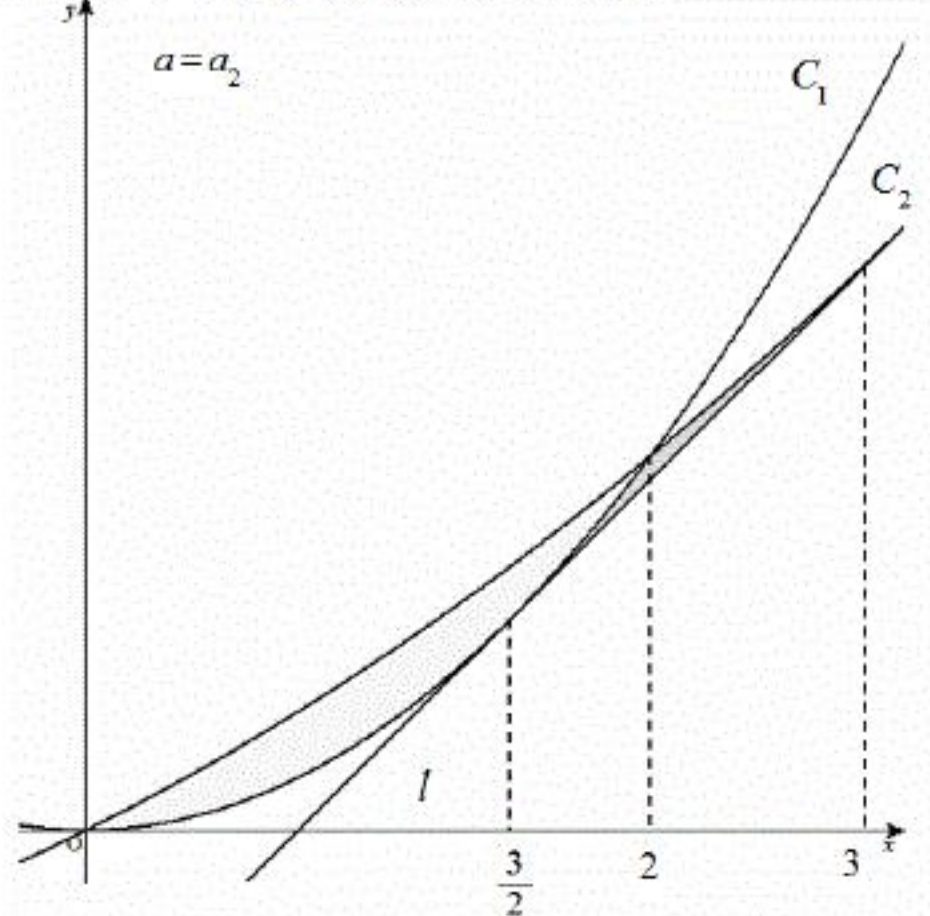
よって $a = a_1$ のときのグラフを描くと次のようになる。(灰色部は面積を求める部分)

よって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^0 \{x^2 + 6x - (4x - 1)\} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \{4x^2 - (4x - 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(2x-1)^3}{6} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) $a = a_2$ のとき

(i) と同様にしてグラフを描くと次のようになる。



よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{3}{2}}^2 \{4x^2 - (12x - 9)\} dx + \int_2^3 \{x^2 + 6x - (12x - 9)\} dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3)^2 dx + \int_2^3 (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{(2x-3)^3}{6} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上より $S_1 = S_2$

(証明終)

(1)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

いま, $\sin x, \cos x$ がともに正の値なので $0 < x < \frac{\pi}{2}$ であり, さらに

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{7}{25}$$

となるので以上から $x = 2\theta$

(答) $x = 2\theta$

(2)

$$7 \sin x + 24 \cos x = 15$$

$$7 \sin x = 15 - 24 \cos x \cdots \textcircled{1}$$

両辺を 2 乗して

$$49 \sin^2 x = (15 - 24 \cos x)^2$$

$$49(1 - \cos^2 x) = (15 - 24 \cos x)^2$$

$$(125 \cos x - 44)(5 \cos x - 4) = 0$$

$$\text{よって } \cos x = \frac{44}{125}, \frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{4}{5} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から } \sin x = -\frac{3}{5}$$

このとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ と $0 < x < 2\pi$ から

$$x = 2\pi - \theta$$

$$\cos x = \frac{44}{125} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から } \sin x = \frac{117}{125}$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \frac{117}{125}$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = -\frac{44}{125}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 2\pi$ から

$$x = \pi - 3\theta$$

ここで, 求めた x が $0 < x < 2\pi$ を満たすことを確認する。

まず, $0 < x = \pi - 3\theta$ について, 式を変形すると

$$\theta < \frac{\pi}{3}$$

関数 $f(x) = \sin x$ について, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)$ は単調増加することから,

$$0 < \sin \theta = \frac{3}{5} < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって, $\theta < \frac{\pi}{3}$ であることが確認された。

次に, $x = \pi - 3\theta < 2\pi$ について, 式を変形すると

$$\theta > -\frac{\pi}{3}$$

これは $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, 条件を満たす。

以上から求める x は,

$$x = 2\pi - \theta, \pi - 3\theta$$

(答) $x = 2\pi - \theta, \pi - 3\theta$

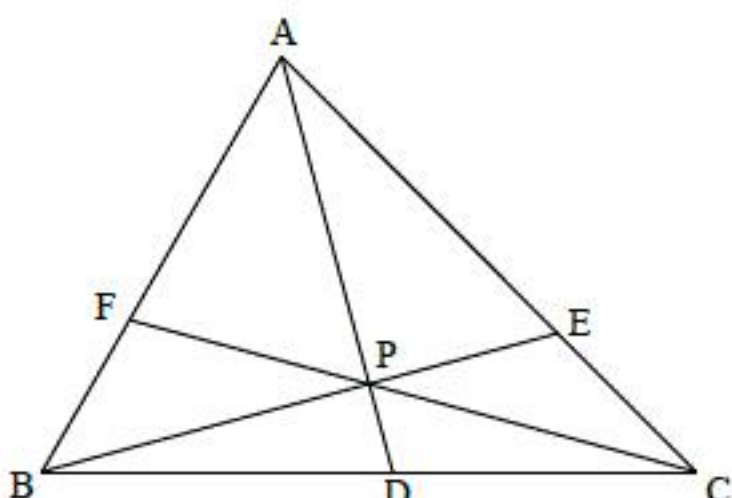
(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{p} - \overrightarrow{b} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \left\{ (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + 2(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) \right\} \\ &= \frac{1}{3+\sqrt{3}} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3+\sqrt{3}} \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

また、 $\frac{1}{3+\sqrt{3}} > 0, \frac{2}{3+\sqrt{3}} > 0, \frac{1}{3+\sqrt{3}}(1+2) = \frac{3}{3+\sqrt{3}} < 1$ なので、P は三角形の内部にある。

(証明終)

(2)



上図のようにD, E, Fを定める。また、 $0 < t < 1$ となる t を用いて

$$\overrightarrow{BE} = (1-t)\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC}$$

と定める。実数 k を用いて $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BP}$ と書けるので、

$$\overrightarrow{BE} = \frac{k}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{BA} + \frac{2k}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{BC}$$

である。 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ は一次独立であるから、係数を比較すると、

$$\begin{cases} k = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

より、

$$AE:EC = 2:1$$

$$BP:PE = \sqrt{3}:1$$

となる。ここで、

$$S_A = \frac{EC}{AC} \cdot \frac{BP}{BE} \cdot \triangle ABC$$

$$S_B = \frac{PE}{BE} \cdot \triangle ABC$$

$$S_C = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{BP}{BE} \cdot \triangle ABC$$

より、

$$S_A:S_C = \left(\frac{EC}{AC} \cdot \frac{BP}{BE} \right) : \left(\frac{AE}{AC} \cdot \frac{BP}{BE} \right) = 1:2$$

$$S_A:S_B = \left(\frac{EC}{AC} \cdot \frac{BP}{BE} \right) : \left(\frac{PE}{BE} \right) = 1:\sqrt{3}$$

とわかる。

(証明終)

(3)

Pは $\triangle ABC$ の外心なので $PA=PB=PC$ であり、さらに円周角の定理から

$$\begin{cases} \angle APB = 2\angle C \\ \angle BPC = 2\angle A \cdots \textcircled{1} \\ \angle CPA = 2\angle B \end{cases}$$

である。したがって、外接円の半径を r とおくと

$$\begin{cases} S_A = \frac{r^2}{2} \sin 2\angle A \\ S_B = \frac{r^2}{2} \sin 2\angle B \\ S_C = \frac{r^2}{2} \sin 2\angle C \end{cases}$$

であるから、(2)の結果により

$$S_A:S_B:S_C = \sin 2\angle A : \sin 2\angle B : \sin 2\angle C = 1:\sqrt{3}:2 \cdots \textcircled{2}$$

また、仮定より、

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi \cdots \textcircled{3}$$

である。ここで②より、 $0 < k \leq \frac{1}{2}$ となる実数 k を用いて

$$\sin 2\angle A = k, \sin 2\angle B = \sqrt{3}k, \sin 2\angle C = 2k$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\sin 2\angle C &= \sin(2\pi - (2\angle A + 2\angle B)) \\ &= -\sin(2\angle A + 2\angle B) \\ &= -\sin 2\angle A \cos 2\angle B - \cos 2\angle A \sin 2\angle B \\ \Leftrightarrow 2k &= -k \cos 2\angle B - \sqrt{3}k \cos 2\angle A \\ \therefore \cos 2\angle B &= -2 - \sqrt{3} \cos 2\angle A \quad (\because k \neq 0)\end{aligned}$$

となる。この式の両辺を2乗すると、 $0 < \angle A < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\angle A < \pi$ となることから、

$$\begin{aligned}\cos^2 2\angle B &= 4 + 4\sqrt{3} \cos 2\angle A + 3\cos^2 2\angle A \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 2\angle B &= 4 + 4\sqrt{3} \cos 2\angle A + 3(1 - \sin^2 2\angle A) \\ \Leftrightarrow 1 - 3k^2 &= 7 + 4\sqrt{3} \cos 2\angle A - 3k^2 \\ \Leftrightarrow \cos 2\angle A &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore 2\angle A &= \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

となる。同様に $0 < 2\angle B < \pi$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos 2\angle B &= -2 - \sqrt{3} \cos 2\angle A \\ &= -\frac{1}{2} \\ \therefore 2\angle B &= \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

$$\therefore 2\angle C = 2\pi - (2\angle A + 2\angle B) = \frac{1}{2}\pi$$

となる。以上より、

$$\angle A = \frac{5}{12}\pi, \angle B = \frac{1}{3}\pi, \angle C = \frac{1}{4}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \angle A = \frac{5}{12}\pi, \angle B = \frac{1}{3}\pi, \angle C = \frac{1}{4}\pi$$