

(1)

 P_θ, Q_θ の座標をそれぞれ $(x_p, y_p), (x_q, y_q)$ とおくと

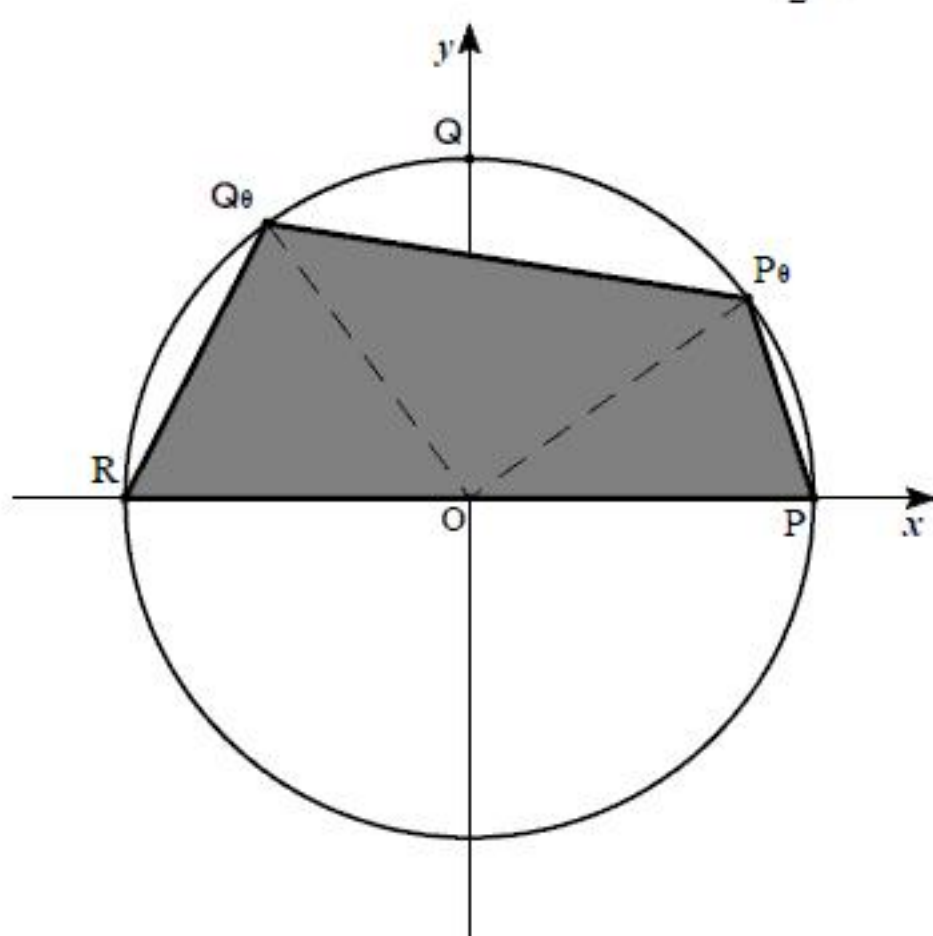
$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。 $S(\theta)$ は $\triangle OPP_\theta, \triangle OP_\theta Q_\theta, \triangle OQ_\theta R$ の面積の和であるので、

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta + \cos \theta + 1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (\sin \theta + \cos \theta + 1)$$

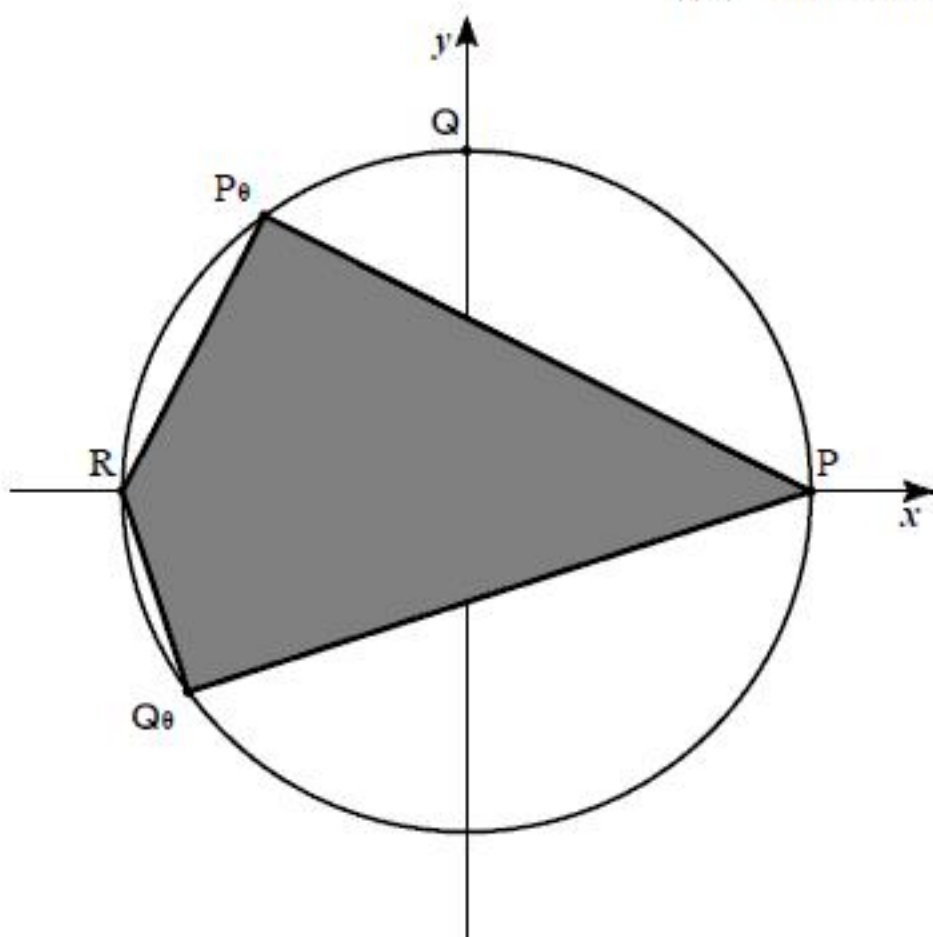


(2)

 $S(\theta)$ は $\triangle PRP_\theta, \triangle PRQ_\theta$ の面積の和であるから

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 2 \times (-\cos \theta) = \sin \theta - \cos \theta$$

$$(\text{答}) \quad \sin \theta - \cos \theta$$



(3)

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right\}$$

であるから、

$$\max S(\theta) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1) \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$S(\theta) = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから、

$$\max S(\theta) = \sqrt{2} \quad \left(\theta = \frac{3}{4} \pi \right)$$

以上より

$$\max S(\theta) = \sqrt{2}$$

であり、このときの θ の値は

$$\theta = \frac{3}{4} \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \max S(\theta) = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3}{4} \pi$$

(1)

$$\begin{cases} f'(x) = -\frac{e^x}{e-1} < 0 \\ f''(x) = -\frac{e^x}{e-1} < 0 \end{cases}$$

であるから、 $y=f(x)$ は上に凸で単調減少の関数であることが分かる。また、

$$f(0)=1$$

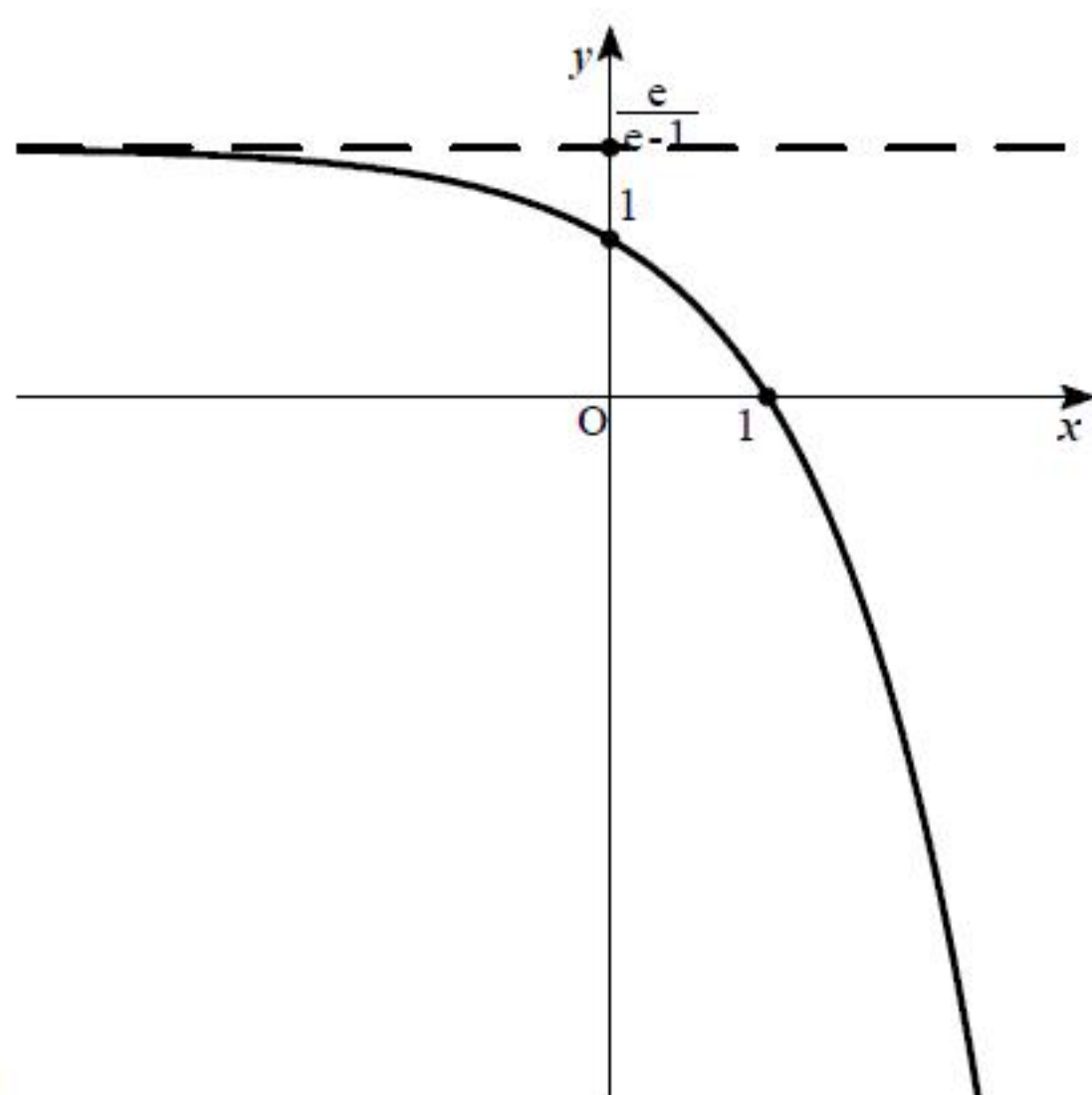
より、点 $(0,1)$ を通り、

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

なので、点 $(1,0)$ を通る。また、

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e}{e-1} \end{cases}$$

となる。以上より、関数 f のグラフの概形は次図のようになる。



(答)

(2)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\frac{e-e^x}{e-1} \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{(e-1)^2} \int_0^1 (e^2 - 2e^{x+1} + e^{2x}) dx \\ &= \frac{\pi}{(e-1)^2} \left[e^2 x - 2e^{x+1} + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{(-e^2 + 4e - 1)\pi}{2(e-1)^2} \end{aligned}$$

$$(答) \quad \frac{(-e^2 + 4e - 1)\pi}{2(e-1)^2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2 \int x \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2(x \log x - x + C') \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C \end{aligned}$$

ここで、 C, C' は積分定数である。

$$(答) \quad x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C$$

(4)

$$W = \pi \int_0^1 x^2 dy$$

$$y=f(x)=\frac{e-e^x}{e-1} \text{ より, } \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{e-1} \text{ より } t \text{ ので}$$

y	0	$\rightarrow$	1
x	1	$\rightarrow$	0

$$W = -\pi \int_1^0 \frac{x^2 e^x}{e-1} dx$$

$$= \frac{\pi}{e-1} \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$x = \log t \text{ とおくと, } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \text{ より } t \text{ ので}$$

x	0	$\rightarrow$	1
t	1	$\rightarrow$	e

$$W = \frac{\pi}{e-1} \int_1^e t (\log t)^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\pi}{e-1} \int_1^e (\log t)^2 dt$$

(3)の結果を用いて

$$W = \frac{\pi}{e-1} \left[t(\log t)^2 - 2t \log t + 2t \right]_1^e$$

$$= \frac{\pi}{e-1} (e - 2e + 2e - 2)$$

$$= \frac{e-2}{e-1} \pi$$

$$(答) \quad \frac{e-2}{e-1} \pi$$

(1)

$$\begin{cases} x = \sin 2t \cos t < 0 \\ y = \sin 2t \sin t > 0 \end{cases}$$

が点 P が第 2 象限に含まれる条件である。これを整理すると

$$\begin{cases} \sin 2t \cos t = 2 \sin t \cos^2 t < 0 \\ \sin 2t \sin t = 2 \sin^2 t \cos t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t < 0 \\ \cos t > 0 \end{cases}$$

よって、求める t の範囲は

$$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$$

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$$

(2)

点 P が直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上にあるとき、 t は

$$\sin 2t \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2t \cos t$$

を満たす。 $3\pi < 2t < 4\pi$ より $\sin 2t \neq 0$ なので、

$$\sin t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos t = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\therefore t = \frac{11}{6}\pi \quad \left(\because \frac{3}{2}\pi < t < 2\pi \right)$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{11}{6}\pi$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2 \cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t \\ &= 2(2 \cos^2 t - 1) \sin t + 2 \sin t \cos^2 t \\ &= 6 \sin t \left(\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\cos t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{11}{6}\pi < t < 2\pi$ において

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos t \\ \sin t < 0 \end{cases}$$

であるから、

$$\frac{dy}{dt} \neq 0$$

が示された。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t \\ &= 2(1 - 2 \sin^2 t) \cos t - 2 \sin^2 t \cos t \\ &= 2 \cos t (1 - 3 \sin^2 t) \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t (3 \cos^2 t - 1)}{\cos t (1 - 3 \sin^2 t)}$$

となる。よって、点 P における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin t (3 \cos^2 t - 1)}{\cos t (1 - 3 \sin^2 t)} \left(x - 2 \sin t \cos^2 t \right) + 2 \sin^2 t \cos t \\ &= \frac{\sin t (3 \cos^2 t - 1)}{\cos t (1 - 3 \sin^2 t)} x - \frac{2 \sin^2 t \cos t}{1 - 3 \sin^2 t} \quad (\because 1 - 3 \sin^2 t \neq 0) \end{aligned}$$

と表される。よって点 Q の座標は

$$\left(\frac{2 \sin t \cos^2 t}{3 \cos^2 t - 1}, 0 \right) \quad (\because 3 \cos^2 t - 1 \neq 0)$$

となる。

$$OP = \sqrt{\sin^2 2t \cos^2 t + \sin^2 2t \sin^2 t} = |\sin 2t|$$

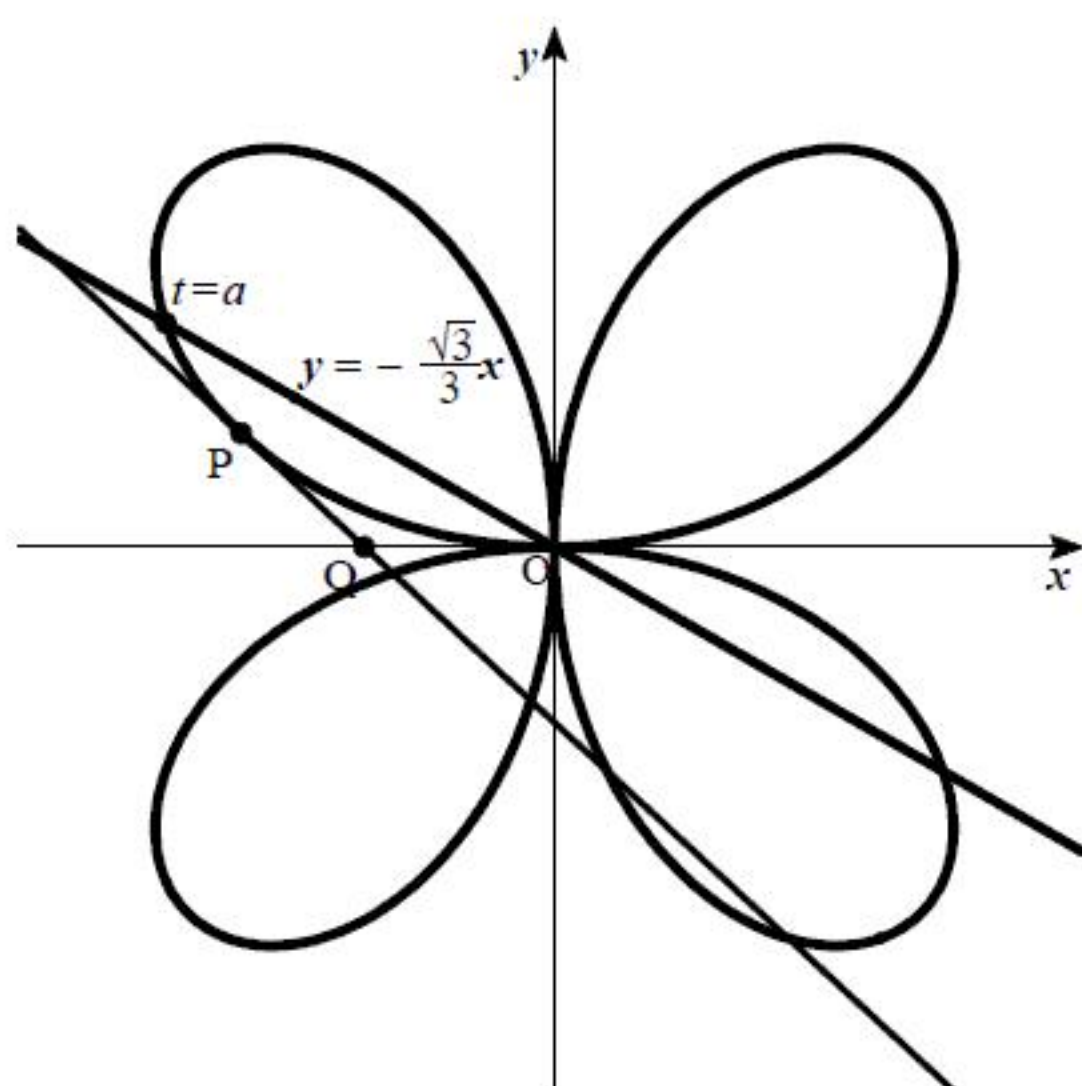
であるから

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{\left| \frac{2 \sin t \cos^2 t}{3 \cos^2 t - 1} \right|}{|\sin 2t|} = \left| \frac{\cos t}{3 \cos^2 t - 1} \right|$$

よって、

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{OQ}{OP} = \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \left| \frac{\cos t}{3 \cos^2 t - 1} \right| = \left| \frac{1}{3-1} \right| = \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$



(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-1 & 2a^2+a \\ 4a+2 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -2a-1 & 2a^2+a \\ 4a+2 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より $A^2 = (2a+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので

(i) $n=2k$ (k は自然数) のとき

$$A^n = (2a+1)A^{n-2} = \cdots = (2a+1)^{k-1}A^2 = (2a+1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $n=2k-1$ (k は自然数) のとき

$$A^n = (2a+1)A^{n-2} = \cdots = (2a+1)^{k-1}A$$

以上より

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{cases} (2a+1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ (2a+1)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(3)

P_n の座標を (a_n, b_n) とおくと

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)より, P_{2k-1} と P_{2k} の座標はそれぞれ $(a(2a+1)^{k-1}, (2a+1)^{k-1})$, $(0, (2a+1)^k)$ となるので, S_k の値は

$$S_k = \frac{1}{2} \left| a(2a+1)^{2k-1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a}{2a+1} \right| (2a+1)^{2k} \quad (\because 2a+1 \neq 0)$$

となる。 S_k の公比は $(2a+1)^2$ なので, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束する条件は

$$0 < (2a+1)^2 < 1$$

$$-1 < 2a+1 < 0, 0 < 2a+1 < 1$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < a < 0$$

このとき求める和は,

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \left| \frac{a(2a+1)}{2} \right| \cdot \frac{1}{1-(2a+1)^2} = \left| \frac{2a+1}{8(a+1)} \right| = \frac{|2a+1|}{8(a+1)}$$

$$(\text{答}) \quad -1 < a < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < a < 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{|2a+1|}{8(a+1)}$$