

平成 21 年度前期日程入学試験問題

数 学 C

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ③ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数 学 C

1 座標平面上に4点 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(0, 1)$, $R(-1, 0)$ がある。

2点 P , Q を O のまわりに角 θ だけ回転させた点を, それぞれ P_θ , Q_θ とする。

ただし, θ は $0 < \theta < \pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ を満たす。4点 P , P_θ , Q_θ , R を頂点とする四角形の面積を $S(\theta)$ とおくとき, 以下の各問に答えよ。

- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $S(\theta)$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき, $S(\theta)$ を求めよ。
- (3) $S(\theta)$ の最大値と, 最大値を与える θ の値を求めよ。

2 関数

$$f(x) = \frac{e - e^x}{e - 1}$$

を考える。以下の各問に答えよ。

- (1) 関数 f のグラフについて, 座標軸との交点, 凹凸, 漸近線を調べ, その概形をかけ。
- (2) x 軸, y 軸および関数 f のグラフで囲まれた図形 A を x 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積 V を求めよ。
- (3) 部分積分法により

$$\int (\log x)^2 dx$$

を求めよ。 $\int \log x dx = x \log x - x + C$ (C は積分定数) を用いてよい。

- (4) (2)の図形 A を y 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積 W を求めよ。

3 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ が

$$x = \sin 2t \cos t, \quad y = \sin 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

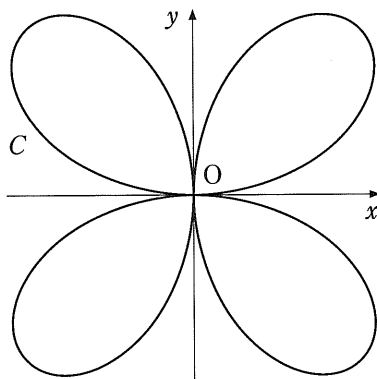
で表されるとき、 P の描く曲線を C とする。 $(C$ は、下図のようになっている。)

また、 P が、第 2 象限 $(x < 0, y > 0)$ に含まれ、かつ直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上にあるときの t の値を a とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 点 P が第 2 象限に含まれるような t の範囲を求めよ。
- (2) a を求めよ。
- (3) $a < t < 2\pi$ を満たす t に対して、 $\frac{dy}{dt} \neq 0$ であることを示せ。
- (4) $a < t < 2\pi$ を満たす t に対して、点 P における C の接線と x 軸との交点を Q とするとき、左側からの極限值

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{OQ}{OP}$$

を求めよ。ただし、 O は原点を、 OP 、 OQ は 2 点間の距離を表す。



- 4 行列 A を $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ と定める。ただし、 a は $a \neq 0$ かつ $a \neq -\frac{1}{2}$ を満たす実数とする。行列 A^n の表す移動によって、座標平面上の点 $(0, 1)$ が移される点を P_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。以下の各問に答えよ。
- (1) A^2 と A^3 を求めよ。
 - (2) A^n を求めよ。
 - (3) 原点を O とし、 $\triangle OP_{2k-1}P_{2k}$ の面積を S_k とおく ($k = 1, 2, 3, \dots$)。無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束するような a の値の範囲を求め、さらに、そのときの無限級数の和を求めよ。