

平成 21 年度前期日程入学試験問題

数 学 F

工 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ③ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数 学 F

1 以下の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = e^{x^2+1}$ について、導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(2) 定積分 $\int_0^\pi x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$ を求めよ。

(3) 次の和を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

$$(1 \cdot 1 + 2) + \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 2\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{4} + 2\right) + \cdots + \left(n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + 2\right)$$

2 座標平面上に4点 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(0, 1)$, $R(-1, 0)$ がある。

2点 P , Q を O のまわりに角 θ だけ回転させた点を、それぞれ P_θ , Q_θ とする。

ただし、 θ は $0 < \theta < \pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ を満たす。4点 P , P_θ , Q_θ , R を頂点とする四角形の面積を $S(\theta)$ とおくと、以下の各問に答えよ。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $S(\theta)$ を求めよ。

(2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) $S(\theta)$ の最大値と、最大値を与える θ の値を求めよ。

3 $\triangle OAB$ があり, 3 点 P, Q, R を

$$\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AQ} = k \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BR} = k \overrightarrow{AO}$$

となるように定める。ただし, k は $0 < k < 1$ を満たす実数である。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, 以下の各問に答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, k$ を用いて表せ。
- (2) $\triangle OAB$ の重心と $\triangle PQR$ の重心が一致することを示せ。
- (3) 辺 AB と辺 QR の交点を M とする。点 M は, k の値によらずに辺 QR を一定の比に内分することを示せ。

4 行列 A を $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ と定める。ただし, a は $a \neq 0$ かつ $a \neq -\frac{1}{2}$ を満たす実数とする。行列 A^n の表す移動によって, 座標平面上の点 $(0, 1)$ が移さ

れる点を P_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。以下の各問に答えよ。

- (1) A^2 と A^3 を求めよ。
- (2) A^n を求めよ。
- (3) 原点を O とし, $\triangle OP_{2k-1}P_{2k}$ の面積を S_k とおく ($k = 1, 2, 3, \dots$)。無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束するような a の値の範囲を求め, さらに, そのときの無限級数の和を求めよ。