

(1)

$$A + B + C = \pi$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{\sin B \sin C} &= \frac{\sin(\pi - A)}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

三角形の面積の公式を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}bc \sin A &= S \\ \Leftrightarrow \sin A &= \frac{2S}{bc}\end{aligned}$$

となる。同様に計算すると,

$$\sin B = \frac{2S}{ac}, \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

となる。さらに, これらを用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\sin A}{\sin B \sin C} &= \frac{\frac{2S}{bc}}{\frac{2S}{ac} \cdot \frac{2S}{ab}} \\ &= \frac{a^2}{2S}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \sin B = \frac{2S}{ac}, \quad \sin C = \frac{2S}{ab}, \quad \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{a^2}{2S}$$

(3)

(1), (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2S} &= \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \\ &= \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) - \frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}$$

となる。同様に計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{2S} &= \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) - \frac{\cos B}{\sin B} \\ \frac{c^2}{2S} &= \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) - \frac{\cos C}{\sin C}\end{aligned}$$

となる。以上より, $a \geq b \geq c$ ならば,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2S} &\geq \frac{b^2}{2S} \geq \frac{c^2}{2S} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} &\leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 7 \\
 &= (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 7 \\
 &= (3^x - 7)(3^x + 1)
 \end{aligned}$$

となるので、求める不等式の解は

$$\begin{aligned}
 f(x) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow -1 &\leq 3^x \leq 7 \\
 \Leftrightarrow x &\leq \log_3 7
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x \leq \log_3 7$

(2)

$$(x^2 - 4)f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4 \geq 0 \text{ かつ } f(x) \leq 0) \text{ または } (x^2 - 4 \leq 0 \text{ かつ } f(x) \geq 0)$$

[1] $x^2 - 4 \geq 0$ かつ $f(x) \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\leq -2, \quad 2 \leq x \quad \cdots \textcircled{1} \\
 f(x) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\leq \log_3 7 \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$1 = \log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9 = 2$ であることに注意すると、

不等式の解は、①かつ②を満たす x の範囲なので、

$$x \leq -2$$

となる。

[2] $x^2 - 4 \leq 0$ かつ $f(x) \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow -2 &\leq x \leq 2 \quad \cdots \textcircled{3} \\
 f(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\geq \log_3 7 \quad \cdots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

不等式の解は、③かつ④を満たす x の範囲なので、

$$\log_3 7 \leq x \leq 2$$

となる。

以上[1], [2]より、求める不等式の解は

$$x \leq -2, \quad \log_3 7 \leq x \leq 2$$

となる。

(答) $x \leq -2, \quad \log_3 7 \leq x \leq 2$

(1)

C_1 と C_2 は点 P において直線 l に接するので、点 P における微分係数の値が等しい。

それぞれの方程式を x で微分すると、

$$C_1: y' = 2x, \quad C_2: y' = -2b(x-2)$$

となるので、

$$2x_0 = -2b(x_0 - 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{2b}{b+1}$$

となる。また、 C_1 と C_2 は点 P を通るので、

$$\begin{aligned} x_0^2 - a &= -b(x_0 - 2)^2 \\ \Leftrightarrow a &= x_0^2 + b(x_0 - 2)^2 \\ &= \left(\frac{2b}{b+1}\right)^2 + b\left(\frac{2b}{b+1} - 2\right)^2 \\ &= \frac{4b}{b+1} \end{aligned}$$

となり、

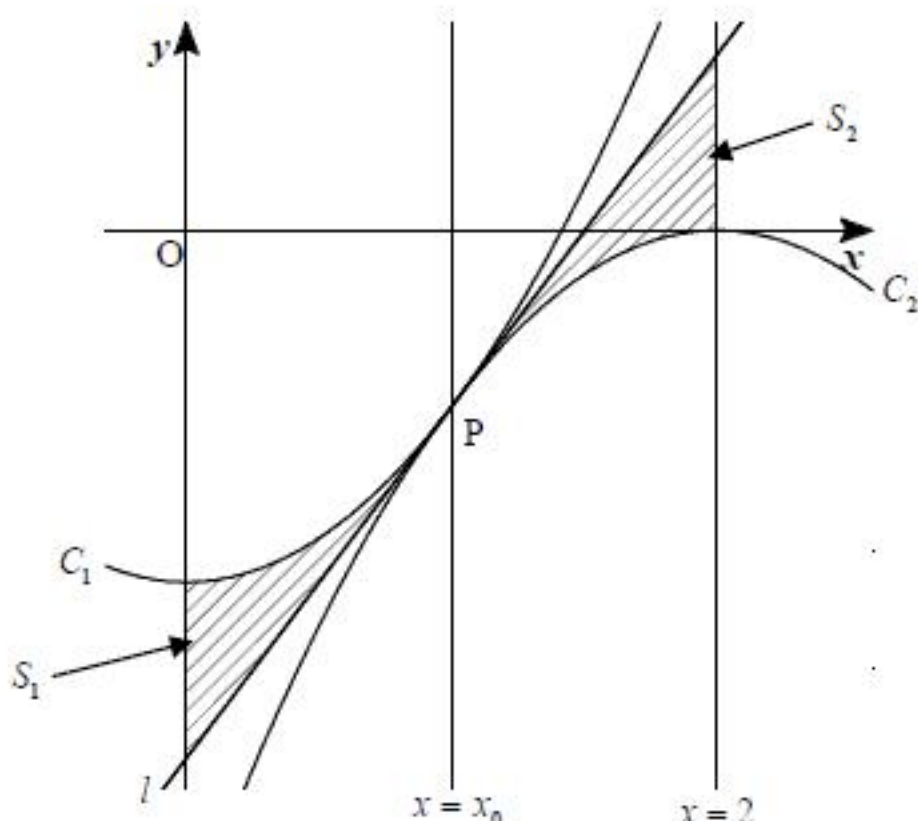
$$\begin{aligned} y_0 &= x_0^2 - a \\ &= \left(\frac{2b}{b+1}\right)^2 - \frac{4b}{b+1} \\ &= -\frac{4b}{(b+1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{4b}{b+1}, \quad x_0 = \frac{2b}{b+1}, \quad y_0 = -\frac{4b}{(b+1)^2}$$

(2)

S_1, S_2 は、それぞれ下図斜線部の面積である。



直線 l の式を $y = f(x)$ とおくと、上図より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{x_0} \{ (x^2 - a) - f(x) \} dx \\ &= \int_0^{x_0} (x - x_0)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} \right]_0^{x_0} \\ &= \frac{x_0^3}{3} \\ S_2 &= \int_{x_0}^2 \left[f(x) - \{ -b(x-2)^2 \} \right] dx \\ &= \int_{x_0}^2 b(x - x_0)^2 dx \\ &= b \cdot \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} \right]_{x_0}^2 \\ &= b \cdot \frac{(2 - x_0)^3}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ より、

$$2 - x_0 = \frac{x_0}{b}$$

が成り立つことを用いると、

$$S_2 = b \cdot \frac{(2 - x_0)^3}{3} = \frac{b}{3} \left(\frac{x_0}{b} \right)^3 = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{x_0^3}{3} = \frac{S_1}{b^2}$$

となる。よって、

$$S_1 : S_2 = b^2 : 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 : S_2 = b^2 : 1$$

(1)

$$1^2 = 0 \cdot 3 + 1, 2^2 = 1 \cdot 3 + 1, 3^2 = 3 \cdot 3 + 0$$

なので,

$$1^2 @ 3 = 1, 2^2 @ 3 = 1, 3^2 @ 3 = 0$$

となる。また, $a^2 @ 3$ ($a > 3$) は,

[1] $a = 3l$ (l は自然数) のとき

$$a^2 = 9l^2 = 3l^2 \cdot 3 + 0$$

なので,

$$a^2 @ 3 = 0$$

[2] $a = 3l + 1$ (l は自然数) のとき

$$a^2 = 9l^2 + 6l + 1$$

$$= (3l^2 + 2l) \cdot 3 + 1$$

なので,

$$a^2 @ 3 = 1$$

[3] $a = 3l + 2$ (l は自然数) のとき

$$a^2 = 9l^2 + 12l + 4$$

$$= (3l^2 + 4l + 1) \cdot 3 + 1$$

なので,

$$a^2 @ 3 = 1$$

以上より, $a > 3$ のとき

$$a^2 @ 3 = \begin{cases} 0 & (a \text{ が } 3 \text{ の倍数であるとき}) \\ 1 & (a \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1^2 @ 3 = 1, 2^2 @ 3 = 1, 3^2 @ 3 = 0, \quad a^2 @ 3 = \begin{cases} 0 & (a \text{ が } 3 \text{ の倍数であるとき}) \\ 1 & (a \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$$

(2)

$$a = dc + e, \quad b = fc + g$$

とおく。ここで, d, e, f, g は 0 以上の整数であり,

$$0 \leq e < c, \quad 0 \leq g < c$$

を満たす。さらに,

$$e + g = hc + i$$

とおく。ここで, h, i は 0 以上の整数であり,

$$0 \leq i < c$$

を満たす。すると,

$$\begin{aligned} a + b &= (d + f)c + e + g \\ &= (d + f + h)c + i \end{aligned}$$

なので,

$$(a + b) @ c = i$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \{(a @ c) + (b @ c)\} @ c &= (e + g) @ c \\ &= i \end{aligned}$$

となる。以上より, 自然数 a, b, c に対して

$$(a + b) @ c = \{(a @ c) + (b @ c)\} @ c$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

背理法によって示す。 a, b がともに 3 の倍数でないとする。 (1) の結果を用いて

$$a^2 @ 3 = b^2 @ 3 = 1$$

となる。よって, $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき, (2) の結果を用いて,

$$\begin{aligned} c^2 @ 3 &= (a^2 + b^2) @ 3 \\ &= \{(a^2 @ 3) + (b^2 @ 3)\} @ 3 \\ &= (1 + 1) @ 3 = 2 \end{aligned}$$

となるが, (1) の結果より, $c^2 @ 3$ の値は 0 か 1 のどちらかなので矛盾する。

よって, 仮定が誤りであり, a, b の少なくともひとつは 3 の倍数であることが示された。

(証明終)