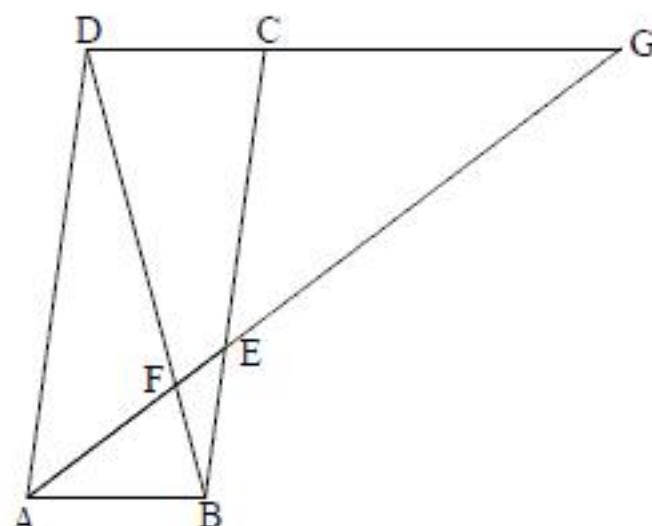


(1)



点 E は辺 BC を 1:2 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

を得る。

$\triangle AFD$ と $\triangle EFB$ について, $\angle AFD = \angle EFB$ であり,

また, $AD \parallel BC$ であることから, $\angle FAD = \angle FEB$ である。

よって, 三角形の 3 つの角が全て等しいことから,

$$\triangle AFD \sim \triangle EFB$$

が成り立ち, 相似比は

$$\triangle AFD : \triangle EFB = AD : EB = 3 : 1$$

となる。これより, $AF : FE = 3 : 1$ となるので,

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \frac{3}{3+1}\overline{AE} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

を得る。次に, $\overline{AG}$ について考える。

$\triangle AFB$ と $\triangle GFD$ について, $\angle AFB = \angle GFD$ であり,

また, $AB \parallel DG$ であることから, $\angle BAF = \angle DGF$ である。

よって, 三角形の 3 つの角が全て等しいことから,

$$\triangle AFB \sim \triangle GFD$$

が成り立ち, 相似比は

$$\triangle AFB : \triangle GFD = BF : FD = 1 : 3$$

となる。これより, $AF : FG = 1 : 3$ となるので,

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \frac{1+3}{1}\overline{AF} \\ &= 3\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overline{AE} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}, \overline{AF} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \overline{AG} = 3\vec{a} + \vec{b}$$

(2)

$$\begin{aligned}\{x \cos t + (1-x) \sin t\}^2 &= x^2 \cos^2 t + 2x(1-x) \sin t \cos t + (1-x)^2 \sin^2 t \\ &= x^2 + x(1-x) \sin 2t + (1-2x) \sin^2 t \\ &= x^2 + x(1-x) \sin 2t + \frac{1-2x}{2}(1 - \cos 2t)\end{aligned}$$

となる。ここで, $\sin 2t$ は奇関数であり, $1 - \cos 2t$ は偶関数であるため,

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ x^2 + x(1-x) \sin 2t + \frac{1-2x}{2}(1 - \cos 2t) \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ 2x^2 + (1-2x)(1 - \cos 2t) \} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[2x^2 t + (1-2x) \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \pi x^2 + (1-2x) \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。平方完成すると,

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$$

となるので, 求める最小値は

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \frac{1}{4} \quad \left(x = \frac{1}{2} \text{ のとき} \right)$$

2

(1)

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x|^p \\ &= |x|^p \\ &= f(x) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ は偶関数なので、 $x \geq 0$ の範囲で考える。すると、

$$f(x) = x^p$$

なので、 $0 < p < 1$ より、

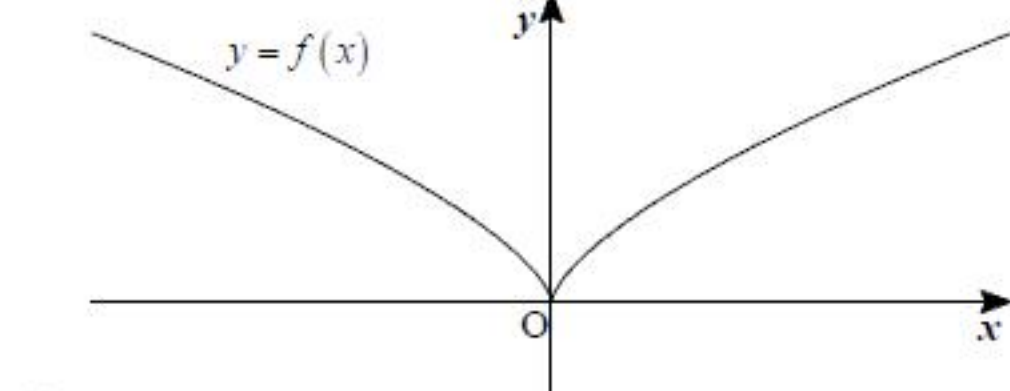
$$f'(x) = px^{p-1} \geq 0$$

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \leq 0$$

よって、 $x \geq 0$ の範囲で $f(x)$ は上に凸の単調増加関数である。また、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{p}{x^{1-p}} = +\infty$$

であることに注意すると、 $y = f(x)$ の概形は次図のようになる。



(答)

(2)

[1] $a > 0$ のとき

$$f'(x) = px^{p-1}$$

より、接線の方程式は

$$y = pa^{p-1}(x-a) + a^p$$

$$= pa^{p-1}x + (1-p)a^p$$

となり、接線と x 軸の交点の x 座標は、

$$pa^{p-1}x + (1-p)a^p = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{(1-p)a}{p}$$

となる。

[2] $a < 0$ のとき

$$f'(x) = -p(-x)^{p-1}$$

より、接線の方程式は、

$$y = -p(-a)^{p-1}(x-a) + (-a)^p$$

$$= -p(-a)^{p-1}x + (1-p)(-a)^p$$

となり、接線と x 軸の交点の x 座標は、

$$-p(-a)^{p-1}x + (1-p)(-a)^p = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{(1-p)a}{p}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a > 0 \text{ のとき} & \text{接線: } y = pa^{p-1}x + (1-p)a^p & x \text{ 座標: } -\frac{(1-p)a}{p} \\ a < 0 \text{ のとき} & \text{接線: } y = -p(-a)^{p-1}x + (1-p)(-a)^p & x \text{ 座標: } -\frac{(1-p)a}{p} \end{cases}$$

(3)

$x = a_{n-1}$ における $y = f(x)$ の接線が x 軸と交わるとき、交点の x 座標は(2)の答を用いて

$$x = -\frac{(1-p)a_{n-1}}{p}$$

となる。よって、題意より

$$a_n = -\frac{1-p}{p}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

が成立する。これより数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 1$ 、公比 $-\frac{1-p}{p}$ の等比数列であるので、

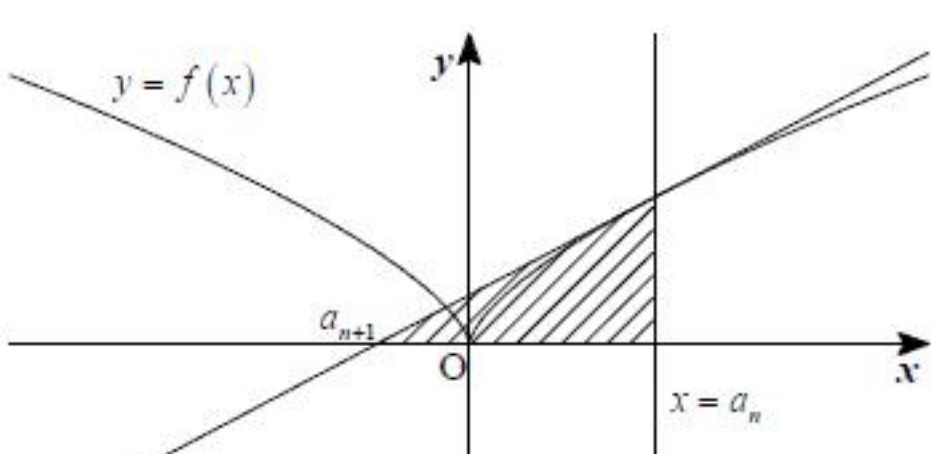
$$\begin{aligned} a_n &= \left(-\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} a_1 \\ &= \left(-\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \left(-\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}$$

(4)

T_n は次図斜線部の面積である。



斜線部の図形は三角形であり、底辺の長さが

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| -\frac{1-p}{p}a_n - a_n \right| \\ &= \frac{|a_n|}{p} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

であり、高さが

$$\begin{aligned} f(a_n) &= |a_n|^p \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{p(n-1)} \end{aligned}$$

であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{p(n-1)} \\ &= \frac{1}{2p} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{(p+1)(n-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad T_n = \frac{1}{2p} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{(p+1)(n-1)}$$

(5)

T_n は初項 $\frac{1}{2p}$ 、公比 $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{p+1}$ の等比数列である。よって、 $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ が収束する条件は、

$$-1 < \left(\frac{1-p}{p}\right)^{p+1} < 1$$

である。 $0 < p < 1$ なので、

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{p+1} > -1$$

は常に成立する。

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{p+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-p}{p} < 1 \quad (\because 0 < p < 1)$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$

であるから、求める p の範囲は

$$\frac{1}{2} < p < 1$$

となり、このとき無限級数の値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{p+1}} = \frac{p^p}{2\{p^{p+1} - (1-p)^{p+1}\}}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1}{2} < p < 1 \text{ のときに収束し、無限級数の値 } \frac{p^p}{2\{p^{p+1} - (1-p)^{p+1}\}}$$

(1)

正弦定理を用いると、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成立するので、

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって、 $a \geq b \geq c$ のとき

$$\sin A \geq \sin B \geq \sin C$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

三角形の面積の公式と、①を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot \sin C \\ &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

①と、(2)の結果を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{S} &= \frac{(2R \sin A)^2}{2R^2 \sin A \sin B \sin C} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin(\pi - B - C)}{\sin B \sin C} \quad (\because A + B + C = \pi) \\ &= 2 \cdot \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \sin C} \\ &= 2 \left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) \end{aligned}$$

を得る。同様に計算すると、

$$\frac{b^2}{S} = 2 \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} \right), \frac{c^2}{S} = 2 \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2}{S} = 2 \left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right), \frac{b^2}{S} = 2 \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} \right), \frac{c^2}{S} = 2 \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right)$$

(4)

(3)の答を用いると、

$$\begin{aligned} a &\geq b \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{S} &\geq \frac{b^2}{S} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} &\leq \frac{\cos B}{\sin B} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} b &\geq c \\ \Leftrightarrow \frac{b^2}{S} &\geq \frac{c^2}{S} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos B}{\sin B} &\leq \frac{\cos C}{\sin C} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $a \geq b \geq c$ のとき

$$\frac{\cos A}{\sin A} \leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C}$$

となることが示された。

(証明終)

(5)

(4)の結果を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\cos A}{\sin A} &\leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)} &\leq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} \leq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} \\ \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) &\leq \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < A, B, C < \pi$ なので、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - A, \frac{\pi}{2} - B, \frac{\pi}{2} - C < \frac{\pi}{2}$ であり、

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan x$ は単調増加することから、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - A \leq \frac{\pi}{2} - B \leq \frac{\pi}{2} - C$$

$$\Leftrightarrow A \geq B \geq C$$

となる。

(証明終)

(6)

(5)の結果を用いると、

$$C = \frac{C + C + C}{3} \leq \frac{A + B + C}{3} = \frac{\pi}{3}$$

となる。このことと、(1)の結果、さらに②を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{S} &= \frac{2 \sin A}{\sin B \sin C} \\ &\geq \frac{2}{\sin C} \quad (\because \sin A \geq \sin B > 0) \\ &\geq \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad (\because C \leq \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(7)

$\triangle ABC$ が正三角形のとき、

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

となるので、

$$\frac{a^2}{S} = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

が成り立つ。よって、 $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることは必要条件である。

逆に、 $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ が成り立つとき、

④の導出過程の2つの不等号が等号になる必要があるので、

$$\sin A = \sin B, \quad C = \frac{\pi}{3}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin B \\ \Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) &= 0 \quad \left(\because A+B = \frac{2}{3}\pi\right) \\ \therefore A &= B = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となるので、 $\triangle ABC$ は正三角形となる。よって、 $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることは十分条件である。

以上より、 $\triangle ABC$ が正三角形であるためには

$\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることが必要十分であることが示された。

(証明終)