

1

(1)

x の整式を $x^2 - 4x + 3$ で割った余りは高々1次式であるから実数 a, b を用いて $ax + b$ と表される。このとき、ある x の整式 $Q(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^n &= (x^2 - 4x + 3)Q(x) + ax + b \\ \Leftrightarrow x^n &= (x-1)(x-3)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

とかけるから、両辺に $x=1, 3$ をそれぞれ代入して

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1^n = a + b \\ 3^n = 3a + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) = \left(\frac{3^n - 1}{2}, \frac{-3^n + 3}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。よって、求める余りは

$$\frac{3^n - 1}{2}x + \frac{-3^n + 3}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3^n - 1}{2}x + \frac{-3^n + 3}{2}$$

(2)

この数列の第 n 項は

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + 3^{n-1} + \cdots + 3 + 1 &= 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \right) - 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

となるから、この数列の第 n 項から第 $2n$ 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} (2 \cdot 3^{k-1} - 1) &= 2 \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - (n+1) \\ &= 3^{2n} - 3^{n-1} - n - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3^{2n} - 3^{n-1} - n - 1$$

(3)

$f(0) = 0, f'(0) = \pi$ であるから、微分の定義式より

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta) - f(0)}{\theta - 0} \\ \Leftrightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta)}{\theta} &= \pi \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

であることと、 $t = 2\sin^2 \theta$ とおくと

$$\theta \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

となることを用いて

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(2\sin^2 \theta)}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \theta}{\theta^2} \cdot \frac{f(2\sin^2 \theta)}{2\sin^2 \theta} \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \\ &= 2 \cdot 1^2 \cdot \pi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2} = 2\pi$$

2

(1)

$C_1: y = x^2 + (a+1)x - a(2a+1)$, $C_2: y = -x^2 + (3a+1)x + a(2a-1)$ の共有点の x 座標は

$$x^2 + (a+1)x - a(2a+1) = -x^2 + (3a+1)x + a(2a-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

の解である。この方程式の判別式を D とおくと

$$D = 9a^2 > 0 \quad (\because a \neq 0)$$

となるから方程式は異なる 2 つの実数解をもち、 C_1, C_2 は異なる 2 交点をもつことが示された。

(証明終)

(2)

実数 k を用いて C_1 を除く C_1, C_2 の交点を通る図形は

$$k\{x^2 + (a+1)x - a(2a+1) - y\} + \{-x^2 + (3a+1)x + a(2a-1) - y\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)y = (k-1)x^2 + \{(a+1)k + 3a+1\}x - a(2a+1)k + a(2a-1)$$

と表される。よって、これが直線を示すとき

$$k-1=0$$

$$\Leftrightarrow k=1$$

となるから、そのときの直線 $\ell(a)$ の方程式は

$$2y = (4a+2)x - 2a$$

$$\Leftrightarrow y = (2a+1)x - a$$

である。さらに

$$y = (2a+1)x - a$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)a + x - y = 0$$

は

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

であるとき、 a の値に関係なく必ず満たされるから、直線 $\ell(a)$ が a の値に関係なく必ず通る

定点 P の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \ell(a): y = (2a+1)x - a, P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(3)

(1)の結果を用いて、 C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x-2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a, 2a$$

となる。

[1] $a < 0$ のとき

$2a < 0 < -a$ であるから、定点 P が C_1, C_2 の 2 交点を結んだ線分上にあるのは

$$2a \leq \frac{1}{2} \leq -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -a$$

$$\Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{2}$$

のときである。

[2] $a > 0$ のとき

$-a < 0 < 2a$ であるから、定点 P が C_1, C_2 の 2 交点を結んだ線分上にあるのは

$$-a \leq \frac{1}{2} \leq 2a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2a$$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

のときである。

以上, [1], [2]より、求める a の範囲は $a \leq -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq a$ である。

$$(\text{答}) \quad a \leq -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq a$$

3

(1)

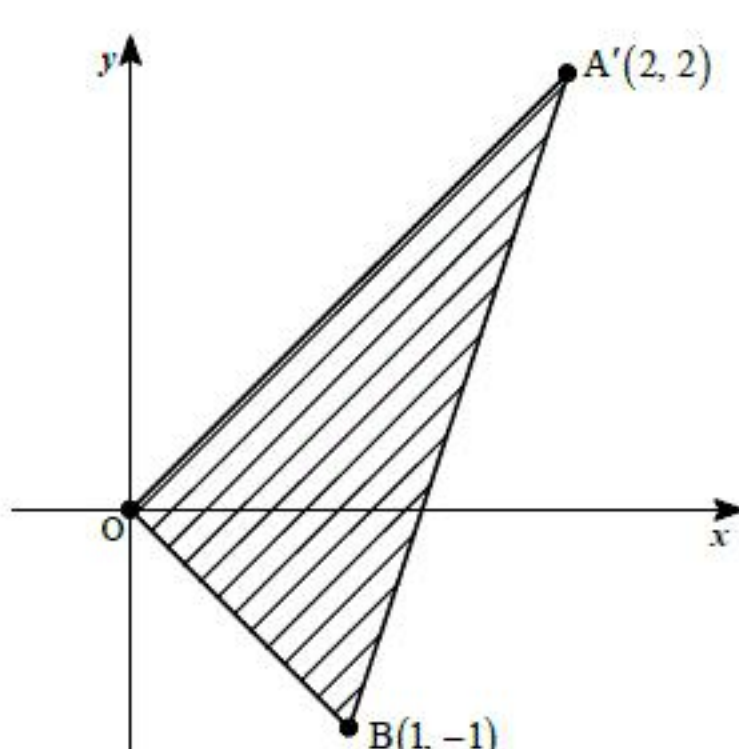
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA}) + t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

であり

$$s + 2t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}s + t \leq 1, \frac{1}{2}s \geq 0, t \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。点 A' を $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ を満たす点とすると、 $A'(2, 2)$ であり、 s, t が $\textcircled{1}$ を満たしながら動くとき、点 P の存在する範囲は $\triangle OAB$ の周および内部、つまり、3 点 $(0, 0), (2, 2), (1, -1)$ を頂点にもつ三角形の周および内部となる。これを図示すると下図の斜線部ようになる。ただし、境界は含む。



(答) 3 点 $(0, 0), (2, 2), (1, -1)$ を頂点にもつ三角形の周および内部, 前図

(2)

u が $0 \leq u \leq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-u)\overrightarrow{QA} + 2u\overrightarrow{QB} \\ \Leftrightarrow (2+u)\overrightarrow{OQ} &= (1-u)\overrightarrow{OA} + 2u\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} &= \frac{1-u}{2+u}\overrightarrow{OA} + \frac{2u}{2+u}\overrightarrow{OB} \quad (\because u \neq -2) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} &= \frac{2(1-u)}{2+u} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3u}{2+u} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

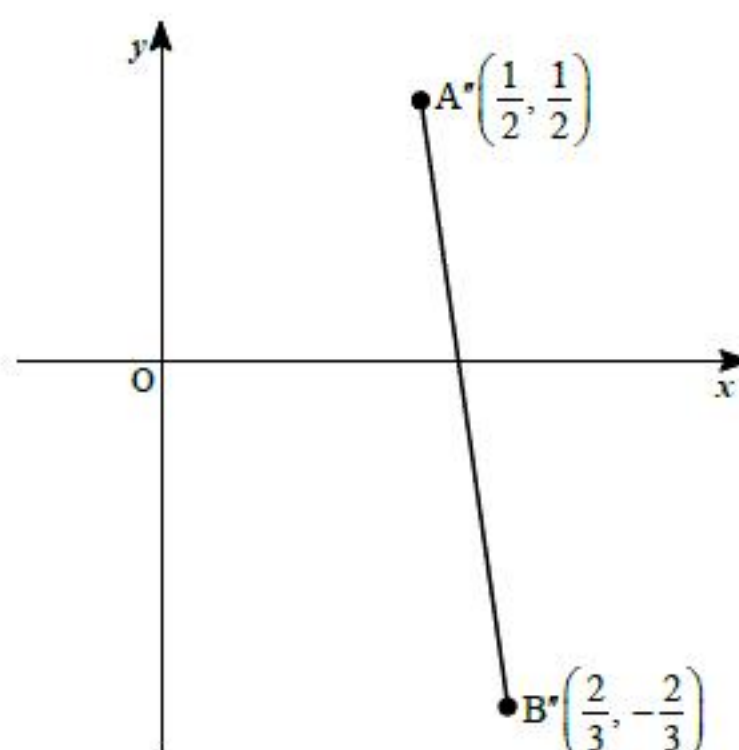
となり

$$\frac{2(1-u)}{2+u} + \frac{3u}{2+u} = 1, \frac{2(1-u)}{2+u} \geq 0, \frac{3u}{2+u} \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、点 A^*, B^* をそれぞれ $\overrightarrow{OA^*} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB^*} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ を満たす点とすると、

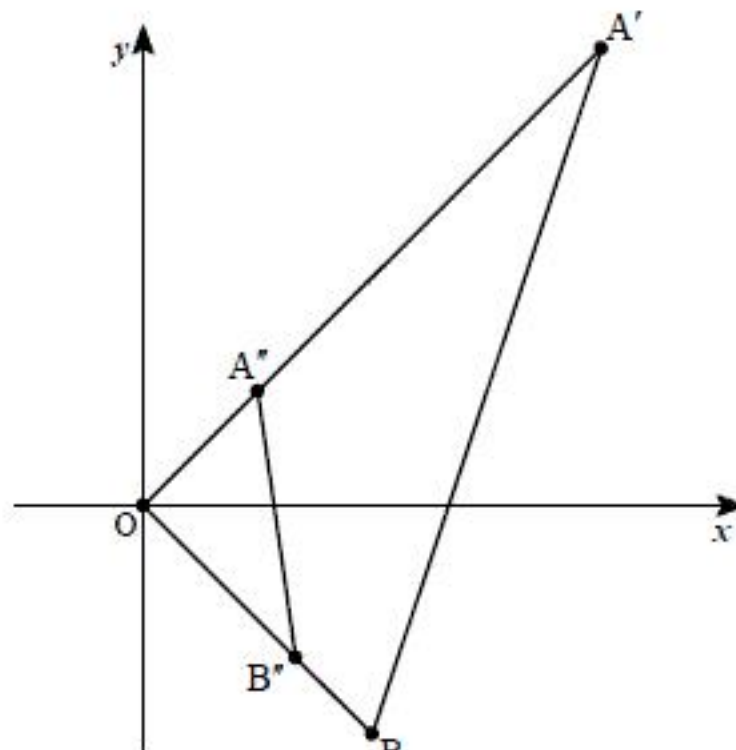
$A^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B^*\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ であり、 u が $\textcircled{2}$ を満たしながら動くとき、点 Q の存在する範囲は線分

A^*B^* 上、つまり、2 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ を結んだ線分上となる。これを図示すると下図の実線部ようになる。



(答) 2 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ を結んだ線分上, 前図

(3)



上図より

$$\triangle OA'B' = S$$

$$\triangle OAB = S + T$$

であり、また

$$OA' : OA = 1 : 4, OB' : OB = 2 : 3$$

であるから

$$\triangle OA'B' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \triangle OAB$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{6}(S + T)$$

$$\Leftrightarrow 5S = T$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{T} = \frac{1}{5}$$

となる。

(答) $\frac{S}{T} = \frac{1}{5}$

4

(1)

$f(x) = (x-3)\sqrt{x} \ (x > 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x} + (x-3) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

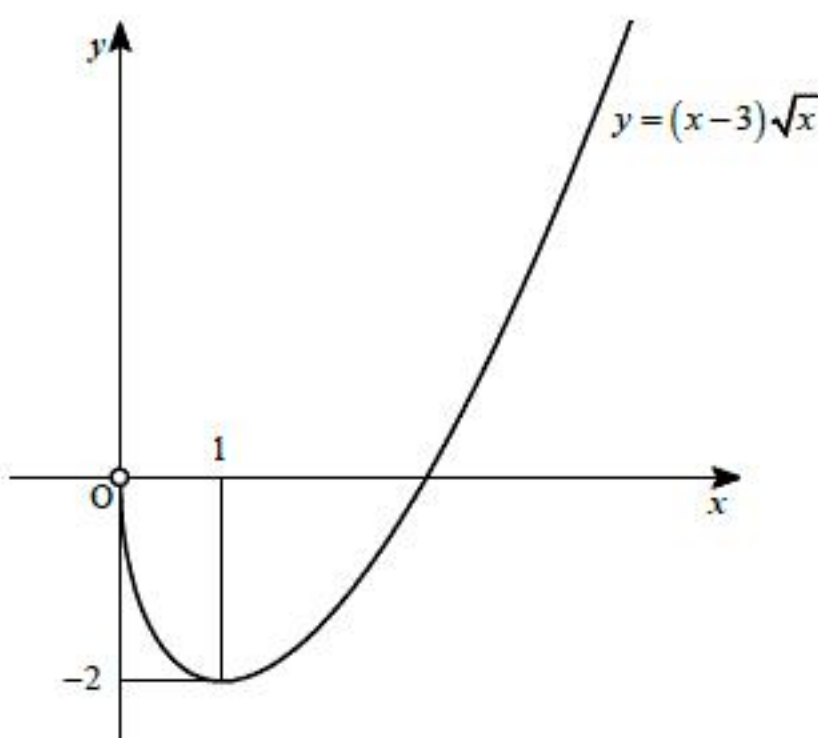
となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	$\diagdown$	-	0	+
$f(x)$	$\diagdown$	$\searrow$		$\nearrow$

さらに、 $f(x)$ は

$$x=1 \text{ のとき極小値 } f(1) = -2$$

をとり、関数 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

[1] $t=1$ のとき

曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における法線は、 $(1, -2)$ を通る y 軸に平行な直線となるから、その方程式は

$$x=1$$

である。

[2] $t \neq 1$ のとき

$f'(t) \neq 0$ より、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{2\sqrt{t}}{3(t-1)}(x-t) + (t-3)\sqrt{t} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{t}x + 3(t-1)y - \sqrt{t}(3t^2 - 10t + 9) &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。

以上、[1]、[2]の結果と、 $\textcircled{1}$ において $t=1$ とすると $x=1$ となることから、求める法線の方程式は

$$2\sqrt{t}x + 3(t-1)y - \sqrt{t}(3t^2 - 10t + 9) = 0$$

となる。

(答) $2\sqrt{t}x + 3(t-1)y - \sqrt{t}(3t^2 - 10t + 9) = 0$

(3)

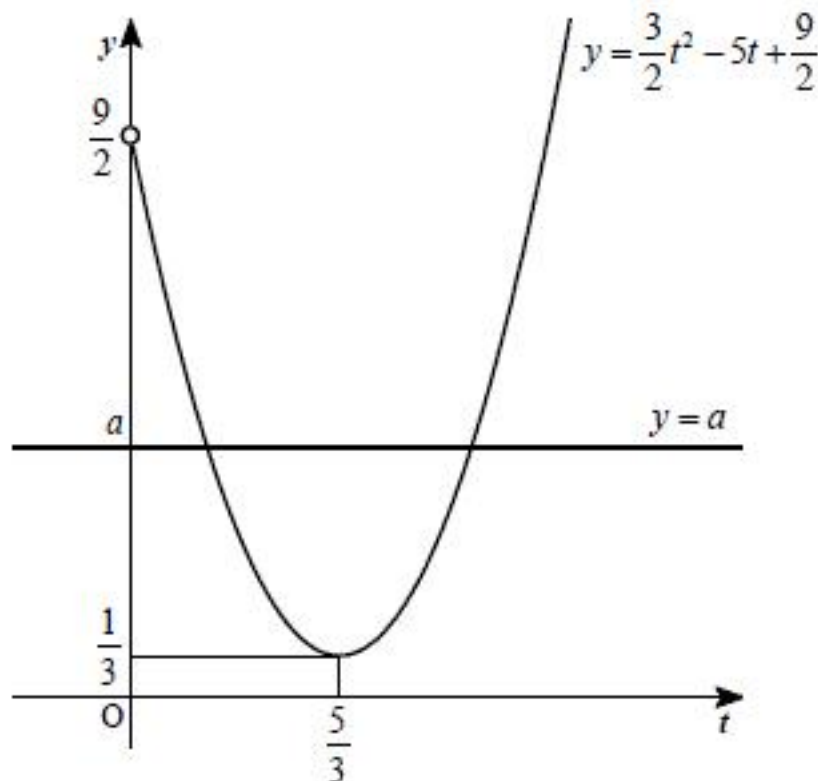
直線 $2\sqrt{t}x + 3(t-1)y - \sqrt{t}(3t^2 - 10t + 9) = 0$ が点 $(a, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 2a\sqrt{t} &= \sqrt{t}(3t^2 - 10t + 9) \\ \Leftrightarrow 2a &= 3t^2 - 10t + 9 \ (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。これを満たす実数 $t \ (t > 0)$ の個数は、2つの関数 $y = \frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{9}{2}$ 、 $y = a$ のグラフの交点の個数に一致し、これが求める法線の本数に一致する。

$$\frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

を用いて、2つの関数 $y = \frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{9}{2}$ 、 $y = a$ のグラフの概形は下図のようになる。



よって、このグラフの交点の個数は

$$\begin{aligned} a &< \frac{1}{3} \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ a &= \frac{1}{3}, \frac{9}{2} \leq a \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{3} &< a < \frac{9}{2} \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{aligned}$$

であるから、求める法線の本数は

$$\begin{aligned} a &< \frac{1}{3} \text{ のとき } 0 \text{ 本} \\ a &= \frac{1}{3}, \frac{9}{2} \leq a \text{ のとき } 1 \text{ 本} \\ \frac{1}{3} &< a < \frac{9}{2} \text{ のとき } 2 \text{ 本} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a < \frac{1}{3}$ のとき 0 本

$a = \frac{1}{3}, \frac{9}{2} \leq a$ のとき 1 本

$\frac{1}{3} < a < \frac{9}{2}$ のとき 2 本