

平成 22 年度前期日程入学試験問題

数 学 C

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ③ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数 学 C

1 以下の各問に答えよ。

- (1) 平行四辺形 ABCD の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E, 直線 AE と対角線 BD との交点を F, 直線 AE と直線 CD との交点を G とする。 $\overrightarrow{AB}$ を $\vec{a}$ で, $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$ で表すとき, 3 つのベクトル $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) 関数 $g(x)$ を次式で定める。

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{x \cos t + (1-x) \sin t\}^2 dt$$

このとき, $g(x)$ の最小値を求めよ。

2 p を $0 < p < 1$ を満たす有理数の定数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = |x|^p$ と定める。以下の各問に答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け。
- (2) a を 0 でない実数の定数とすると, 点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ。また, 接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める: $a_1 = 1$ とし, $n \geq 2$ のとき a_n を点 $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標とする。このとき一般項 a_n を n と p を用いて表せ。
- (4) (3) で定めた数列 $\{a_n\}$ について, 点 $(a_n, f(a_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と, x 軸, および直線 $x = a_n$ とで囲まれた部分の面積を T_n とする。 T_n を n と p を用いて表せ。
- (5) (4) の $T_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ について, 無限級数 $T_1 + T_2 + T_3 + \dots$ が収束する p の範囲を求めよ。また, 収束するときの無限級数の値を求めよ。

3

$\triangle ABC$ において $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさと対辺の長さをそれぞれ A , B , C および a , b , c で表す。 $\triangle ABC$ の面積を S とし, 3 頂点を通る円の半径を R とする。 $a \geq b \geq c$ とするとき以下の各問に答えよ。

- (1) $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$ を示せ。
- (2) $S = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C$ を示せ。
- (3) $\frac{a^2}{S}$, $\frac{b^2}{S}$, $\frac{c^2}{S}$ のそれぞれを $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\frac{\cos B}{\sin B}$, $\frac{\cos C}{\sin C}$ を用いて表せ。
- (4) $\frac{\cos A}{\sin A} \leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C}$ を示せ。
- (5) $A \geq B \geq C$ を示せ。
- (6) $\frac{a^2}{S} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$ を示せ。
- (7) $\triangle ABC$ が正三角形であるためには $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることが必要十分であることを示せ。