

平成 22 年度前期日程入学試験問題

数 学 F

工 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ③ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数 学 F

1 以下の各問に答えよ。

(1) n を 3 以上の自然数とする。整式 x^n を $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 数列

$$1, 1 + 3 + 1, 1 + 3 + 9 + 3 + 1, 1 + 3 + 9 + 27 + 9 + 3 + 1, \dots$$

の第 n 項から第 $2n$ 項までの和を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = \pi$ を満たすとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2}$$

2 a を 0 でない実数とする。

$$C_1: y = x^2 + (a + 1)x - a(2a + 1)$$

$$C_2: y = -x^2 + (3a + 1)x + a(2a - 1)$$

で表される曲線 C_1 と曲線 C_2 について、以下の各問に答えよ。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 交点をもつことを示せ。

(2) C_1 と C_2 の 2 交点を通る直線 $\ell(a)$ の方程式を求めよ。また、 $\ell(a)$ が a の値に関係なく必ず通る定点 P の座標を求めよ。

(3) (2) で求めた定点 P が C_1 と C_2 の 2 交点を結んだ線分上にあるような a の値の範囲を求めよ。

3 点 O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ がある。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1) 実数 s, t によって、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定められる点 P を考える。 s, t が $s + 2t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$ を満たしながら動くとき、点 P の存在する範囲を求めよ。さらに、その範囲が表す図形を図示せよ。
- (2) 実数 u によって、 $\overrightarrow{OQ} = (1 - u)\overrightarrow{QA} + 2u\overrightarrow{QB}$ で定められる点 Q を考える。 u が $0 \leq u \leq 1$ を満たしながら動くとき、点 Q の存在する範囲を求めよ。さらに、その範囲が表す図形を図示せよ。
- (3) (1) で得られた図形が、(2) で得られた図形によって 2 つの図形に分割される。この 2 つの図形の面積をそれぞれ S, T ($S \leq T$) とおくと、 $\frac{S}{T}$ の値を求めよ。

4 曲線 $C: y = (x - 3)\sqrt{x}$ ($x > 0$) の法線を考える。ただし、曲線 C 上の点 P における法線とは、点 P を通り、この曲線上の点 P における接線に垂直に交わる直線のことである。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1) 関数 $y = (x - 3)\sqrt{x}$ ($x > 0$) の増減、極値を調べて、そのグラフをかけ。
- (2) 曲線 C 上の点 $(t, (t - 3)\sqrt{t})$ における法線の方程式を求めよ。
- (3) a を正の定数とすると、点 $(a, 0)$ を通る法線の本数を調べよ。