

1

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

(2)

このとき、点PはAC上に存在するから、 $0 < s < 1$ を満たす実数 s を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= s\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{s}\overrightarrow{AP} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と表される。また、点PはBD上に存在することから、 $0 < t < 1$ を満たす実数 t を用いて、

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AD} \quad \dots\dots ②$$

と表される。①を(1)の答に代入して、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{s}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}\right) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{4s}\right)\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

ここで、 $s = \frac{1}{4}$ とすると、 $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ となり、矛盾するから、両辺を $1 - \frac{1}{4s}$ で割り、

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{s}{4s-1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \quad \dots\dots ③$$

となる。②と③から $\overrightarrow{AP}$ を消去して、

$$t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AD} = \frac{s}{4s-1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

となる。右辺は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ の係数が同じであるから、

$$t = 1 - t = \frac{1}{2}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{s}{4-1} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2s &= 4s-1 \\ \therefore s &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。以上より、点Pは対角線AC, BDの中点となるので、四角形ABCDは平行四辺形である。

(答) 四角形ABCDは平行四辺形

(1)

線分 AB と直線

$$y = f(x) = (b-a)x - (3b+a)$$

との交わり方には、次の 2 通りが考えられる。

[1] $f(-1) \geq 5$ かつ $f(2) \leq -1$ のときこのとき、 a, b は連立不等式

$$\begin{cases} -4b-5 \geq 0 \\ -3a-b+1 \leq 0 \end{cases}$$

を満たす。

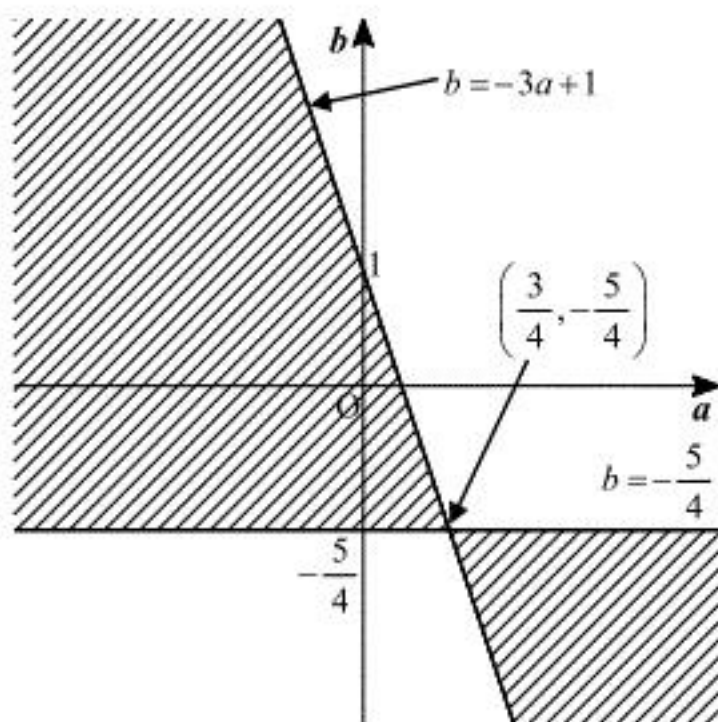
[2] $f(-1) \leq 5$ かつ $f(2) \geq -1$ のときこのとき、 a, b は連立不等式

$$\begin{cases} -4b-5 \leq 0 \\ -3a-b+1 \geq 0 \end{cases}$$

を満たす。

以上、[1], [2] をまとめて、 a, b は、不等式

$$(-4b-5)(-3a-b+1) \leq 0$$

を満たすから、点 $P(a, b)$ の存在する領域は、下図のとおりである。(ただし、境界線を含む。)

(答) 前図

3

(1)

$C_1: y = x^2 - x + 1$ より, $y' = 2x - 1$ であるから, 点 $A(1, 1)$ における C_2 の接線は,

$$y = (2 \cdot 1 - 1)(x - 1) + 1 = x$$

と求まる。したがって, ℓ の方程式は,

$$\ell: y = -(x - 1) + 1 = -x + 2$$

と求まる。 $C_2: y = x^2 - 2x + 1$ より, C_2 と ℓ の交点の x 座標は,

$$-x + 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。したがって, 点 B の座標は, $x > 0$ であるほうを考えて,

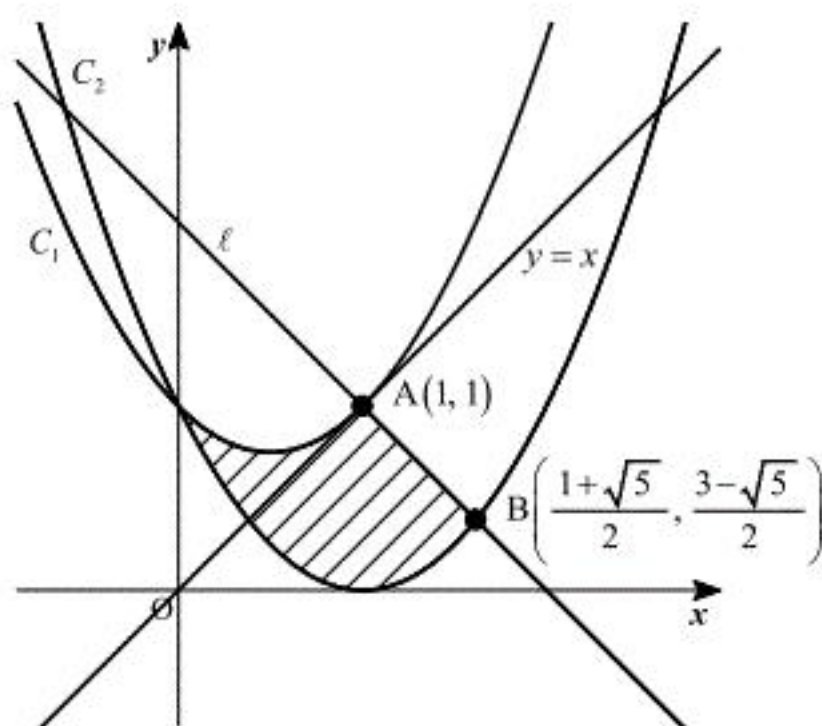
$$B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

(2)

求める面積は下図の斜線部である。



この面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^2 - x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\} dx + \int_1^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \{(-x + 2) - (x^2 - 2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} (-x^2 + x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_1^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$ とおくと, $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$ を満たすことに注意して,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \alpha^3 + \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} (\alpha^2 + \alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} (\alpha + 1) + \frac{2}{3} \alpha \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \alpha + \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}$$

4

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^3 - 3x^2 + 2x) = 0$$

より、 $f(x)$ は連続関数である。また、 $x \leq 2$ のとき、

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

であるから、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。このとき、

$$f\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

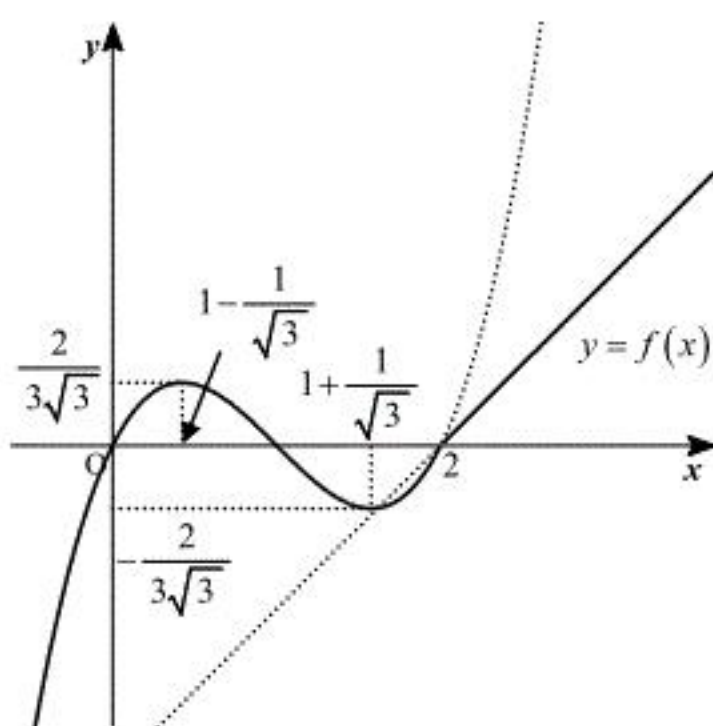
と求まる。また、

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (3x^2 - 6x + 2) = 2$$

であるから、増減表は次のとおりである。

x	...	$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	$\times$	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって、グラフは下図のとおりである。



(答) 前図

(2)

$$a \leq x \leq a+2 \text{ での } f(x) \text{ の最大値が } f(a+2) \text{ と等しい} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。

(1)のグラフより $x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ においては単調増加であるから、

$$a+2 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

のときは、条件①を満たす。

次に、再び、 $f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとるのはいつかを考える。グラフより、それは $x > 2$ においてであり、その値は、

$$x-2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \therefore x = 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

であることがわかる。

$$a+2 = 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

であるから、区間 $\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq x \leq 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ に $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ が含まれるかどうかを調べる。ここで、

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} > 1 - \frac{5}{3 \cdot 1.7} > 0$$

となるから、

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

であることがわかる。したがって、 $-1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ なる a は、条件①を満たさないこと

がわかり、 $a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ において再び条件①が満たされることがわかる。

さらに、 $x > 2$ においては、 $f(x)$ が単調増加であることより、 $a > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ なるすべての a に対

して条件①が成り立つ。以上より、求める a の範囲は

$$a \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq a$$

となる。

$$(答) \quad a \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq a$$