

(1)

$g(x) = e^x - x$ とおく。このとき、

$$g'(x) = e^x - 1$$

であり、 $e > 1$ より指数関数 e^x は単調増加であるから、 $x \geq 0$ において

$$g'(x) \geq g'(0) = e^0 - 1 = 0$$

となるので、 $x \geq 0$ で $g(x)$ は単調増加である。さらに、 $g(0) = 1$ ゆえ、 $x \geq 0$ において

$$g(x) > 0, \text{ すなわち}$$

$$e^x > x$$

であることがわかる。

また、 $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ とおく。このとき、

$$h'(x) = e^x - x = g(x)$$

となるから、先の結果より、 $x \geq 0$ において、 $h'(x) > 0$ となり、 $h(x)$ は単調増加である。さら

に、 $h(0) = 1$ であることから、 $x \geq 0$ において $h(x) > 0$ 、すなわち

$$e^x > \frac{x^2}{2}$$

であることがわかる。

(証明終)

(2)

$x = e^s$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $s \rightarrow \infty$ であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log e^s}{e^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{e^s}$$

が成り立つ。よって、 $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{e^s} = 0$ を示せばよい。

(1)の結果より、 $s > 0$ において、

$$0 < \frac{s}{e^s} < \frac{s}{\frac{s^2}{2}} = \frac{2}{s}$$

が成り立つ。ここで、 $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{s} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{e^s} = 0$$

となり、したがって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ が成り立つ。

次に、 $t = \frac{1}{x}$ とおくと、 $t \rightarrow +0$ のとき、 $x \rightarrow \infty$ であるから、上の結果を用いて、

$$\lim_{t \rightarrow +0} t \log \frac{1}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(3)

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

であり、 $x \geq 0$ において、 $-2x \leq 0$ 、 $e^{-x^2} > 0$ であることから、 $f'(x) \leq 0$ である。これは、関

数 $f(x)$ が減少関数であることを示している。

(証明終)

よって、 $y = f(x)$ の逆関数は存在することがわかる。 $y = f(x)$ を x について解けば、

$$y = e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \log y = -x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\log y$$

となるが、 $f(x)$ の単調減少性から、 $y \leq 1$ であり、したがって、 $-\log y \geq 0$ であるので、両辺

の平方根をとることができ、

$$x = \pm \sqrt{-\log y}$$

となる。 $f(x)$ の定義域が、 $x \geq 0$ であったことに注意すれば、求める逆関数 $g(y)$ は

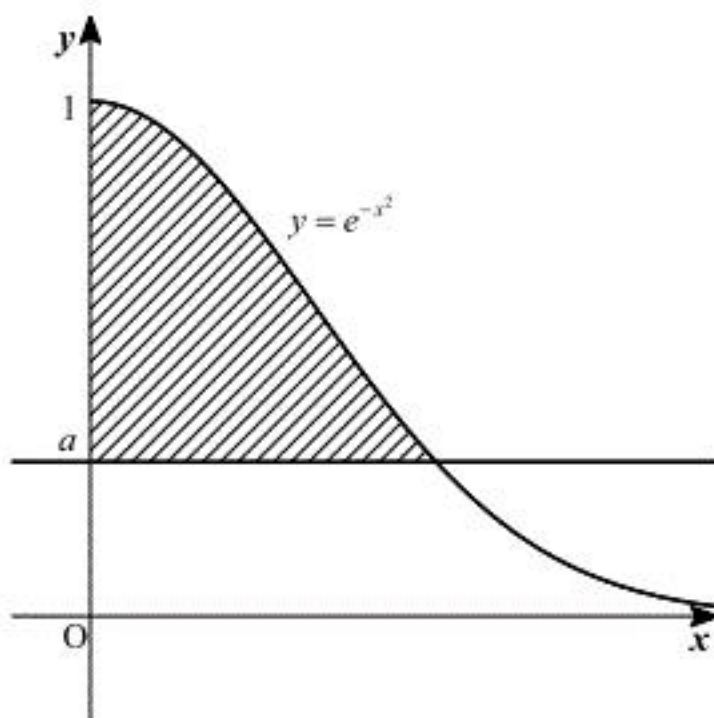
$$g(y) = \sqrt{-\log y} \quad (y \leq 1)$$

となる。

(答) $g(y) = \sqrt{-\log y} \quad (y \leq 1)$

(4)

y 軸と、 $y = f(x)$ のグラフ、 $y = a$ で囲まれた図形は、次図斜線部のようになる。



よって、その y 軸まわりの回転体の体積 $V(a)$ は(3)の逆関数を用いて、

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_a^1 \left(\sqrt{-\log y} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_a^1 \log y \, dy \\ &= -\pi \left[y \log y - y \right]_a^1 \\ &= \pi (a \log a - a + 1) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $V(a) = \pi (a \log a - a + 1)$

(5)

(2)の結果より、

$$\lim_{a \rightarrow +0} a \log a = -\lim_{a \rightarrow +0} a \log \frac{1}{a} = 0$$

となることに注意すれば、

$$\lim_{a \rightarrow +0} V(a) = \pi (0 - 0 + 1) = \pi$$

となる。

(答) $\lim_{a \rightarrow +0} V(a) = \pi$

次のように番号を付けて、以下、各人をその番号で表すことにする。

水戸黄門	助さん	格さん	弥七	お銀	八兵衛
1	2	3	4	5	6

また、6 人の並びかたの総数は、 $6! = 720$ 通りである。

(1)

2, 3 が両端に来るような並びかたを考えると、

(左) 2 ○ ○ ○ ○ 3 (右)

のようになり、中央の 4 つの○に 1, 4, 5, 6 が入ることになる。したがって、2, 3 のどちらが左に来るかで 2 通り、残りの 1, 4, 5, 6 の並び方で 4! 通りであるから、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{15}$$

となる。

(答) $\frac{1}{15}$

(2)

1, 5 をひとまとまりと考えれば、並びかたは 5 つのものを並べる順列で 5! 通り。そして、ひとまとまりにした、1, 5 について、その順序が 2 通りあるから、求める確率は

$$\frac{5! \cdot 2}{6!} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(3)

どの 3 つの数字が、動かずに同じ位置にあるかで ${}_6C_3$ 通りある。たとえば、1, 2, 3 が動かないものとすれば、残りは、最初と同じ位置にはないので、

1, 2, 3, 5, 6, 4 または 1, 2, 3, 6, 4, 5

の 2 通りである。これは、動かない数字を、1, 2, 3 以外にしたときも同様であるから、求める確率は

$$\frac{{}_6C_3 \cdot 2}{6!} = \frac{1}{18}$$

となる。

(答) $\frac{1}{18}$

(4)

1 から n までの n 個の数を並べたときに、「どの数 k も k 番目にならない」並びかたの総数を a_n と書くことにする。求める並びかたの総数は a_6 通りである。

まず、 $a_1 = 0, a_2 = 1$ である。また、 $n \geq 3$ について、このような並びかたは、 n 番目に来る数字が 1 から $n-1$ までの $n-1$ 通りあるが、その数字を M ($1 \leq M \leq n-1$) とすると、

[1] M 番目が n のとき

このとき、

1 番目	⋯	M 番目	⋯	n 番目
		n		M

となるので、残りの並べかたは、 M, n を除いた $n-2$ 個の数について、「どの数 k も k 番目にならない」並び方を考えればよいので、その総数は a_{n-2} 通りである。

[2] M 番目が n でないとき

このような並べかたは、1 から $n-1$ までの数を、「どの数 k も k 番目にならない」ように並べ、その後、数 M (これは M 番目にはないことに注意) を n に置き換えることですべてが重複なく得られる。したがってその総数は、 a_{n-1} に等しい。

以上、[1], [2] より漸化式、

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

が得られる。これを用いて、順に求めると、

$$a_3 = 2(1+0) = 2,$$

$$a_4 = 3(2+1) = 9,$$

$$a_5 = 4(9+2) = 44,$$

$$a_6 = 5(44+9) = 265$$

となる。したがって、求める確率は、

$$\frac{265}{6!} = \frac{53}{144}$$

となる。

(答) $\frac{53}{144}$

(1)

$\overline{BS} = \overline{CD}$ かつ $BC = CD$ であるから、

四角形 BCDS は平行四辺形、かつ、ひし形 $\dots$ ①

である。

直線 AB と直線 CD が直交することと①より、直線 AB と直線 BS も直交する。また、 $AB = CD$ と①から $AB = BS$ が成り立つ。したがって、 $\triangle ABS$ は $\angle ABS = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であり、

$$AS = \sqrt{2} AB \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。直線 BC と直線 DE が直交すること、 $BC = DE$ および①から、同様にして $\triangle EDS$ は $\angle EDS = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であり、

$$ES = \sqrt{2} DE \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つことがわかる。いま、 $AB = DE$ でもあるから、②、③と合わせて、

$$AS = ES$$

を得る。したがって、点 S は線分 AE の垂直二等分線上、すなわち y 軸上に存在することがわかる。

(答) $AS = ES$ 、点 S が満たす条件： y 軸上に存在すること

(2)

$\overline{SA} = (-2, -s)$ を -45° 回転して、長さを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものが、 $\overline{SB}$ であるから、

$$\begin{aligned} \overline{SB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -s \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{s+2}{2} \\ \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OS} + \overline{SB} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{s+2}{2} \\ \frac{s+2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 s が変化するとき、点 B は直線 $y = -x$ を描くことがわかる。

$$\text{(答)} \quad \overline{SB} = \begin{pmatrix} -\frac{s+2}{2}, \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix}, B \left(-\frac{s+2}{2}, \frac{s+2}{2} \right)$$

点 B が描く図形：直線 $y = -x$

(3)

点 A と点 E は y 軸に関して対称である。また、(1)より、 $\triangle ABS \equiv \triangle EDS$ であり、点 S は y 軸上にあるので、点 D が直線 ES の上側にある場合には、(2)で求めた点 B と点 D は y 軸に関して対称な位置にあることがわかる。これを踏まえると、

$$\overline{SD} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{2}, \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix}, D \left(\frac{s+2}{2}, \frac{s+2}{2} \right)$$

点 D が描く図形：直線 $y = x$

であることがわかる。

$$\text{(答)} \quad \overline{SD} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{2}, \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix}, D \left(\frac{s+2}{2}, \frac{s+2}{2} \right)$$

点 D が描く図形：直線 $y = x$

(4)

①と(2)、(3)より

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OS} + \overline{SB} + \overline{BC} \\ &= \overline{OS} + \overline{SB} + \overline{SD} \\ &= (0, s) + \begin{pmatrix} -\frac{s+2}{2}, \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s+2}{2}, \frac{-s+2}{2} \end{pmatrix} \\ &= (0, 2) \end{aligned}$$

と求まる。したがって、点 C は s の値によらず、 $(0, 2)$ である。

(答) 点 C が描く図形：点 $(0, 2)$

(5)

(4)より、 $C(0, 2)$ である。また、 $\angle ACE = 90^\circ$ であるから、3 点 A, C, E が同一円周上にあるならば、AE がその円の直径でなければならないことがわかる。したがって、円の中心は原点となり、半径は 2 と決まる。したがって、(2)、(3)より、点 B は直線 $y = -x$ 上に、点 D は直線 $y = x$ にあり、B と D の y 座標が等しいことを踏まえると、B, D の組み合わせは

$$B(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), D(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{もしくは} \quad B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} B(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), C(0, 2), D(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C(0, 2), D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases}$$