

1

(1)(i)

$$\begin{aligned} y' &= 3 \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' \\ &= 3 \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x \\ &= 6 \sin^2 2x \cos 2x \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $y' = 6 \sin^2 2x \cos 2x$

(ii)

$$y = x - \log(e^x + 1)$$

であるから,

$$\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $y' = \frac{1}{e^x + 1}$

(2)(i)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 dx &= -\frac{1}{2} \int \left(-\frac{2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)' \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 + C \\ &= -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $-\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \right\} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\log 2} e^{\frac{1}{2}x} e^x dx &= \int_{-1}^0 e^{-x} \cdot e^x dx + \int_0^{\log 2} e^x \cdot e^x dx \\ &= \int_{-1}^0 dx + \int_0^{\log 2} e^{2x} dx \\ &= [x]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\log 2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} (e^{2 \log 2} - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (e^{\log 4} - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (4 - 1) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

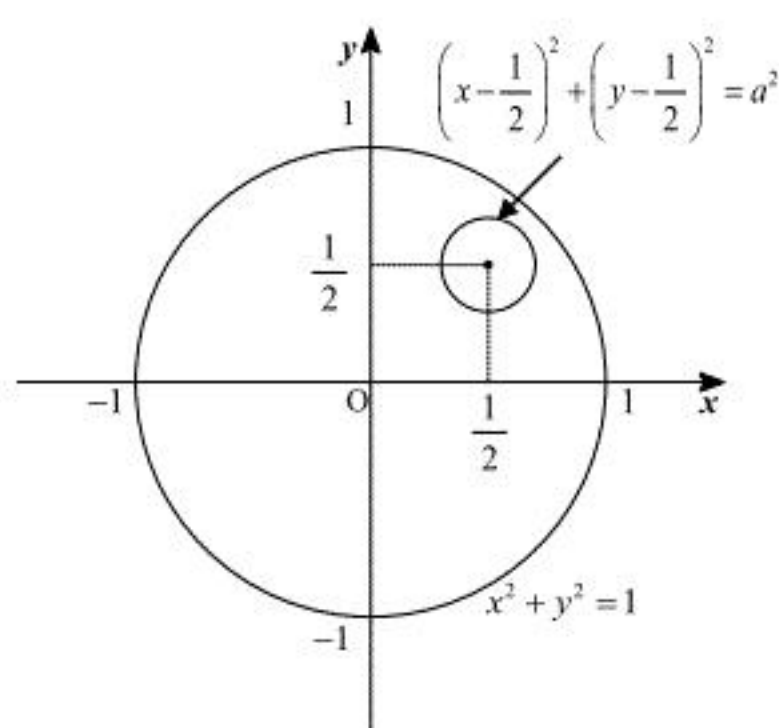
と求まる。

(答) $\frac{5}{2}$

2

(1)

次図のように、 $x^2 + y^2 \leq 1$ が表す領域のなかに、 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq a^2$ の表す領域がすべて含まれればよい。



a が最大になるのは、領域の境界線である 2 つの円が互いに内接するときであり、このとき

$$a = 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。よって、求める a の値の範囲は、

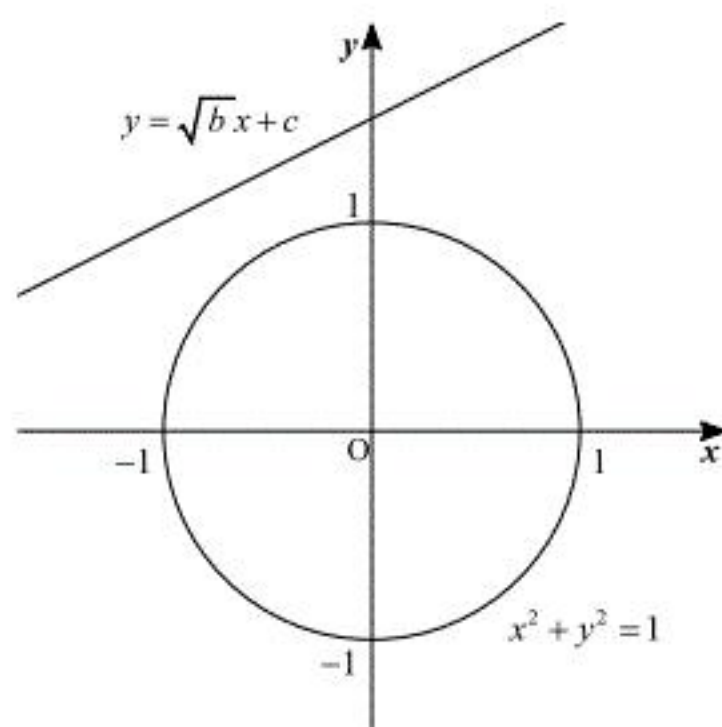
$$0 < a \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

(答) $0 < a \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)

次図のように、 $y \leq \sqrt{b}x + c$ が表す領域のなかに、 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域がすべて含まれればよい。



$y = \sqrt{b}x + c$ が $x^2 + y^2 = 1$ の $y > 0$ の部分と接する条件を考える。

点と直線の距離の公式より、

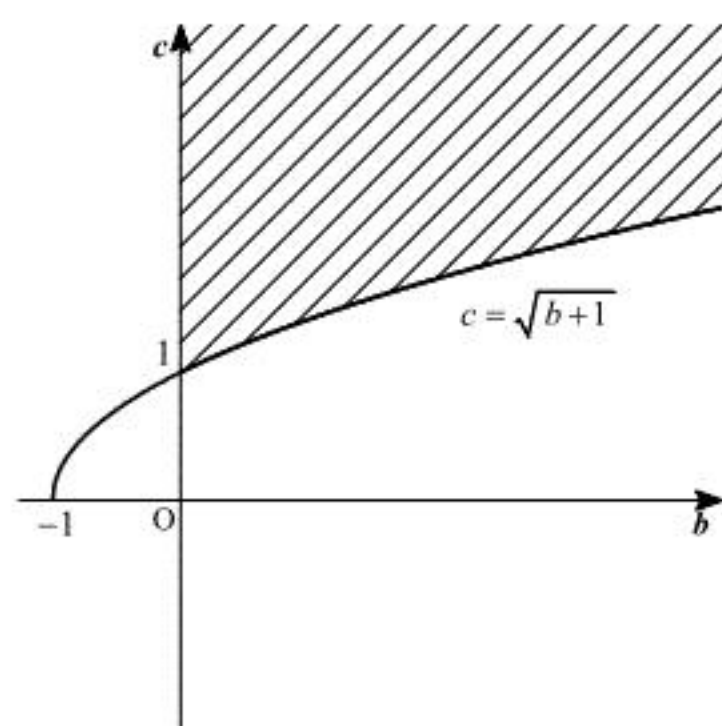
$$\frac{|c|}{\sqrt{b+1}} = 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{b+1}$$

であり、 $y > 0$ の部分と接するのは $c = \sqrt{b+1}$ のときである。

よって、円と直線が前図のような位置関係になるのは、

$$c \geq \sqrt{b+1} \quad (b \geq 0)$$

のときである。これを図示すると次図の斜線部のとおりである。(ただし境界線を含む)



(答) 前図参照

(1)

x 軸方向に関しては正の向きに a だけ進んで、負の向きに c だけ進んでいる。 y 軸方向に関しては正の向きに b だけ進んで、負の向きに d だけ進んでいる。原点から出発しているので、 P_4 の座標は

$$P_4(a-c, b-d)$$

となる。

(答) $P_4(a-c, b-d)$

(2)

(1)より、

$$a-c=1 \text{ かつ } b-d=2$$

となればよい。 $a-c=1$ となる (a, c) の組み合わせは、

$$(a, c) = (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$$

の5通りである。 $b-d=2$ となる (b, d) の組み合わせは、

$$(b, d) = (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$$

の4通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{5 \cdot 4}{6^4} = \frac{5}{324}$$

である。

(答) $\frac{5}{324}$

(3)

OP_1 と P_3P_4 が共有点をもつ条件は、

$$a-c \geq 0 \text{ かつ } b-d \leq 0$$

となることである。 $a=c$ となる (a, c) の組み合わせは6通りである。

さらに $a-c > 0$ となるのは、対称性から

$$\frac{36-6}{2} = 15 \text{ 通り}$$

である。したがって、 $a-c \geq 0$ となるのは、

$$15+6=21 \text{ 通り}$$

である。同様に考えて、 $b-d \leq 0$ となるのは、21通りである。以上より、求める確率は、

$$\frac{21 \cdot 21}{6^4} = \frac{49}{144}$$

である。

(答) $\frac{49}{144}$

(1)

$$E-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\det(E-A) = (1-a)(1-a) - 0 \cdot (-1) = (1-a)^2$$

となるので、 $a=1$ のとき逆行列を持たず、 $a \neq 1$ のとき逆行列をもつ。 $a \neq 1$ のとき、

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} a=1 \text{ のとき} & (E-A)^{-1} \text{ は存在しない} \\ a \neq 1 \text{ のとき} & (E-A)^{-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \end{cases}$$

(2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

であるから、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

であると予想される。このことを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき、

確かに成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ でも成り立つ。

以上より、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

が成り立つことが示された。

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

(3)

a の値で場合分けをして考える。

[1] $a \neq 1$ のとき、

$$S_n = E + A + A^2 + \dots + A^n$$

であるから、

$$S_n = \begin{pmatrix} 1+a+a^2+\dots+a^n & 0+1+2a+\dots+na^{n-1} \\ 0 & 1+a+a^2+\dots+a^n \end{pmatrix}$$

となる。等比数列の和の公式より、

$$1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

となる。さらに、 $S'_n = 0+1+2a+\dots+na^{n-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} S'_n &= 1+2a+3a^2+\dots+na^{n-1} \\ -) \quad aS'_n &= \quad a+2a^2+\dots+(n-1)a^{n-1}+na^n \\ \hline (1-a)S'_n &= 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}-na^n \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} (1-a)S'_n &= 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}-na^n \\ \Leftrightarrow (1-a)S'_n &= \frac{a^n-1}{a-1}-na^n \\ \Leftrightarrow S'_n &= \frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2} \\ 0 & \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \end{pmatrix}$$

となる。

[2] $a=1$ のとき、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= E + A + A^2 + \dots + A^n \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+1+\dots+1 & 0+1+2+\dots+n \\ 0 & 1+1+1+\dots+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

[1], [2]より、

$$S_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2} \\ 0 & \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \end{pmatrix} & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2} \\ 0 & \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \end{pmatrix} & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$