

(1)

方程式  $2^{x+k} - 4^x - 2^3 = 0$  が解を持つための条件を考える。  $X = 2^x$  とおくと、  $X > 0$  の範囲で  $x$  と  $X$  は 1 対 1 対応するから、以下、2 次方程式

$$\begin{aligned} 2^k X - X^2 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - 2^k X + 8 &= 0 \end{aligned}$$

が正の解をもつための条件を考える。ここで、関数  $f(X)$  を  $f(X) = X^2 - 2^k X + 8$  とおき、  $XY$  平面上において放物線  $Y = f(X)$  のグラフについて調べる。  $f(X)$  を平方完成すると

$$f(X) = (X - 2^{k-1})^2 - 2^{2k-2} + 8$$

となるから、放物線  $Y = f(X)$  の軸は  $X = 2^{k-1} (> 0)$  であり、頂点の  $Y$  座標は  $-2^{2k-2} + 8$  となる。したがって、2 次方程式  $f(X) = 0$  が正の解をもつための必要十分条件は

$$\begin{aligned} -2^{2k-2} + 8 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 &\leq 2k - 2 \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k \geq \frac{5}{2}$$

(2)

(1)において、  $X = 2^x$  とおいたから、このとき

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow X > 1 \\ x = 0 &\Leftrightarrow X = 1 \\ x < 0 &\Leftrightarrow 0 < X < 1 \end{aligned}$$

である。まず(1)における考察より、  $k < \frac{5}{2}$  のとき 2 次方程式  $f(X) = 0$  は解を持たない。  $k = \frac{5}{2}$  のとき 2 次方程式  $f(X) = 0$  はただ一つの解をもち、このときの解は

$$\begin{aligned} \left( X - 2^{\frac{5}{2}-1} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= 2\sqrt{2} (> 1) \end{aligned}$$

である。よって、  $k = \frac{5}{2}$  のときはただ一つの正の解をもつことがわかる。また、(1)における考

察より、  $k > \frac{5}{2}$  のとき 2 次方程式  $f(X) = 0$  は異なる 2 つの実数解をもつから、これらの解の符

号について、以下放物線  $Y = f(X)$  の  $f(1)$  の値について場合分けして考える。ここで、放物線の軸  $X = 2^{k-1}$  は  $2^{k-1} \left( > 2^{\frac{3}{2}} \right) > 1$  を満たすことに注意する。

[1]  $k > \frac{5}{2}$  かつ  $f(1) > 0$  のとき

$$\begin{aligned} &\text{つまり} \\ f(1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 2^k &> 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{5}{2} < \right) k &< 2\log_2 3 \end{aligned}$$

のとき、放物線  $Y = f(X)$  は  $X$  軸と  $X > 1$  の範囲で異なる 2 つの交点をもつ。したがって、このとき方程式  $2^{x+k} - 4^x - 2^3 = 0$  は異なる 2 つの正の実数解をもつ。

[2]  $k > \frac{5}{2}$  かつ  $f(1) = 0$  のとき

$$\begin{aligned} &\text{つまり } k = 2\log_2 3 \left( > \frac{5}{2} \right) \text{ のとき、放物線 } Y = f(X) \text{ は } X \text{ 軸と } X = 1 \text{ で交点をもつ。また、このとき方程式 } X^2 - 2^k X + 8 = 0 \text{ の解は} \\ X^2 - 9X + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X-1)(X-8) &= 0 \\ \therefore X &= 1, 8 \end{aligned}$$

であるから、このとき方程式  $2^{x+k} - 4^x - 2^3 = 0$  は 0 と 1 つの正の実数解をもつ。

[3]  $f(1) < 0$  のとき

つまり  $k > 2\log_2 3$  のとき、放物線  $Y = f(X)$  は  $X$  軸と  $X > 1$  の範囲で 1 つの交点をもち、  $0 < X < 1$  の範囲で 1 つの交点をもつ。したがって、このとき方程式  $2^{x+k} - 4^x - 2^3 = 0$  は 1 つの正の実数解と 1 つの負の実数解をもつ。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} k < \frac{5}{2} \text{ のとき、解なし} \\ k = \frac{5}{2} \text{ のとき、1 つの正の実数解をもつ} \\ \frac{5}{2} < k < 2\log_2 3 \text{ のとき、2 つの正の実数解をもつ} \\ k = 2\log_2 3 \text{ のとき、0 および 1 つの正の実数解をもつ} \\ k > 2\log_2 3 \text{ のとき、1 つの正の実数解および 1 つの負の実数解をもつ} \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 & p^*(q^*r) - (p^*q)^*r \\
 &= p^*(q+r+qr) - (p+q+pq)^*r \\
 &= (p+q+r+qr+pq+pr+pqr) - (p+q+pq+r+pr+qr+pqr) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad p^*(q^*r) - (p^*q)^*r = 0$$

(2)

$a_n = 3^n - 1$  となることを数学的帰納法で証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$a_1 = 2$  より成り立つ。

[2]  $n=k$  で成り立つと仮定し、 $n=k+1$  のとき

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= a_k * 2 \\
 &= (3^k - 1) * 2 \\
 &= 3^k - 1 + 2 + (3^k - 1) \cdot 2 \\
 &= 3^{k+1} - 1
 \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$  のときも成り立つ。

以上[1], [2]より  $a_n = 3^n - 1$  となることが証明された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= b_n * 2 = b_n + 2 + b_n \cdot 2 = 3b_n + 2 \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 3(b_n + 1) \\
 \Leftrightarrow b_n + 1 &= 3^{n-1} (b_1 + 1) \\
 \Leftrightarrow b_n &= (p+1) \cdot 3^{n-1} - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad b_n = (p+1) \cdot 3^{n-1} - 1$$

(1)

$0 \leq \theta < 2\pi$  として  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  とすると、 $P$  と  $AB$  の距離が最短のとき、 $\triangle PAB$  の面積が最小になる。直線  $AB$  の方程式が

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

であるので、 $P$  と  $AB$  の距離は

$$\begin{aligned} & \frac{\left| \frac{4}{3} \cos \theta + \sin \theta - 4 \right|}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} \\ &= \frac{3}{5} \left| \frac{5}{3} \sin(\theta + \alpha) - 4 \right| \\ &= \left| \sin(\theta + \alpha) - \frac{12}{5} \right| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha$  は

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$$

をみたす角である。また、 $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$  であるので、 $\sin(\theta + \alpha) = 1$  のとき  $P$  と  $AB$  の距離は最短となり、このとき

$$\begin{cases} \sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

となるので、求める  $P$  の座標は  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  である。

(答)  $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

(2)

まず、

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 &= (1 - 6\cos \theta + 9) + (1 - 8\sin \theta + 16) \\ &= -\sqrt{36 + 64} \sin(\theta + \beta) + 27 \\ &= -10\sin(\theta + \beta) + 27 \end{aligned}$$

となる。ここで  $\beta$  は、

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{3}{5} \\ \cos \beta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

をみたす角である。 $PA^2 + PB^2$  が最小になるには

$$\sin(\theta + \beta) = 1$$

のときである。このとき

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{5} \\ \cos \theta = \frac{3}{5} \end{cases}$$

なので、求める  $P$  の座標は  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  である。

(答)  $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(1)

$C_1$  と  $C_2$  が共に  $P$  を通るので

$$ax_0^2 = -(x_0 - b)^2 + \frac{5}{16} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $P$  での  $C_1$  と  $C_2$  の接線の傾きが等しいので

$$\begin{aligned} 2ax_0 &= -2(x_0 - b) \\ \Leftrightarrow -ax_0 &= x_0 - b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{b}{a+1} \quad (\because a+1 \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②を①に代入すると

$$a \left( \frac{b}{a+1} \right)^2 = - \left( \frac{-ab}{a+1} \right)^2 + \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow (a+a^2) \frac{b^2}{(a+1)^2} = \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{5(a+1)}{16a}$$

$$\therefore b = \sqrt{\frac{5(a+1)}{16a}} \quad (\because b > 0)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{\frac{5(a+1)}{16a}}$$

(2)

$\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2ax_0(x-x_0) + ax_0^2 \\ &= 2ax_0x - ax_0^2 \end{aligned}$$

となるので  $Q$  の  $x$  座標は

$$x = \frac{x_0}{2}$$

である。よって、

$$OQ = \frac{x_0}{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} QR &= x_0 - \frac{x_0}{2} \\ &= \frac{x_0}{2} \end{aligned}$$

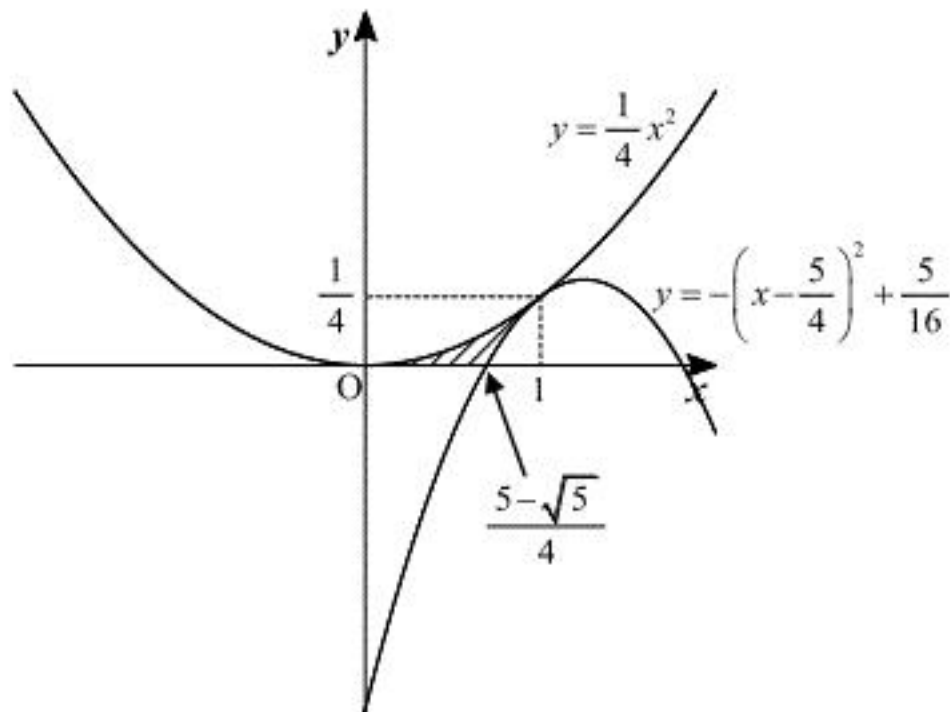
であるので、

$$OQ:QR = 1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad OQ:QR = 1:1$$

(3)



(1)の条件式と②より、 $a = \frac{1}{4}$  のとき

$$b = \sqrt{\frac{5 \left( \frac{1}{4} + 1 \right)}{16 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{5}{4}, \quad x_0 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = 1$$

である。また、放物線  $C_2$  と  $x$  軸の交点のうち、1より小さいものの値は

$$-\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{5}}{4} (< 1)$$

である。ここで、 $\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$  とおくと、 $\alpha$  は関係式

$$-\left(\alpha - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 10\alpha + 5 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たすことに注意する。 $x$  軸と  $C_1$  と  $x \leq x_0$  の部分の  $C_2$  とで囲まれる図形は上図の斜線部であり、この面積を  $S$  とすると

$$S = \int_0^\alpha \frac{1}{4} x^2 dx + \int_\alpha^1 \left\{ \frac{1}{4} x^2 - \left( -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{16} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\alpha x^2 dx + \frac{5}{4} \int_\alpha^1 (x-1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha + \frac{5}{4} \left[ \frac{(x-1)^3}{3} \right]_\alpha^1$$

$$= \frac{\alpha^3}{12} - \frac{5}{12} (\alpha-1)^3$$

$$= \frac{1}{12} (-4\alpha^3 + 15\alpha^2 - 15\alpha + 5)$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ (4\alpha^2 - 10\alpha + 5) \left( -\alpha + \frac{5}{4} \right) + \frac{5}{2} \alpha - \frac{5}{4} \right\}$$

$$= \frac{20\alpha - 10}{96} \quad (\because \textcircled{3} \text{ より } 4\alpha^2 - 10\alpha + 5 = 0)$$

$$= \frac{15 - 5\sqrt{5}}{96} \left( \because \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{15 - 5\sqrt{5}}{96}$$