

(1)

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ とおくと,}$$

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1, \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

が成り立つ。したがって、

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\} = 3$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 - \beta^3) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)\} = 8$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 3 \\ a_4 = 8 \end{cases}$$

(2)

(1)より、 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ を満たすから、 α, β は t の2次方程式

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

の解である。したがって、 $t = \alpha, \beta$ を代入して、

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\beta^2 - 3\beta + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。ゆえに、 $\textcircled{1} \times \alpha^{n-1} - \textcircled{2} \times \beta^{n-1}$ より、

$$\alpha^{n-1}(\alpha^2 - 3\alpha + 1) - \beta^{n-1}(\beta^2 - 3\beta + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = 3(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。このとき、 $\textcircled{3}$ の両辺を $\sqrt{5}$ で割ることにより、漸化式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$

を得る。したがって、 $p=3, q=-1$ である。

(答) $p=3, q=-1$

(3)

(1)より a_1, a_2 は整数であり、また、 a_n は $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ を満たすので、すべての自然数 n に対し、 a_n は整数である。さらに、(2)の漸化式を用いると、

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 3a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= 9a_{n+1} - 3a_n - a_{n+1} \\ &= 8a_{n+1} - 3a_n \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+3} - a_n = 2(4a_{n+1} - 2a_n)$$

となるので、 a_n と a_{n+3} の偶奇は一致する。したがって、題意は証明された。

(証明終)

(1)

すべての実数 t に対して

$$e^t > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立するから、相加平均・相乗平均の関係より

$$g(t) = e^t + e^{-t} \geq 2\sqrt{e^t \cdot e^{-t}} = 2$$

となる。ただし、等号は $t=0$ のとき成り立つ。

(証明終)

(2)

$f(t) = e^t - e^{-t}$ であるので、(1)より

$$f'(t) = e^t + e^{-t} = g(t) \geq 2$$

となる。したがって、常に $f'(t) > 0$ が成立するから、 $f(t)$ は単調増加である。

(証明終)

(3)

$$f(t) = e^t - e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow x = s - \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2 - xs - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \quad (\because s > 0)$$

である。

$$\text{(答)} \quad s = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

(4)

(3)より、

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

であるから、 $f^{-1}(x) = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ である。

$$\text{(答)} \quad f^{-1}(x) = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

(5)

$x = f(t)$ より、

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t} = g(t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 4}} \cdot g(t) dt \\ &= \int \frac{g(t)}{\sqrt{\{g(t)\}^2}} dt \\ &= \int dt \quad (\because g(t) \geq 2) \\ &= t + C \\ &= \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + C \end{aligned}$$

となる。ここに C は積分定数である。

$$\text{(答)} \quad \log \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(6)

(5)の計算より、

$$\sqrt{\{f(t)\}^2 + 4} = g(t)$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4}$$

である。

$$\text{(答)} \quad y = \sqrt{x^2 + 4}$$

(1)

部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 t e^{-t} dt \\ &= \left[-t e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-t} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

(2)

$0 \leq t \leq 1$ において、 $t^n \leq t$ および $0 < e^{-t}$ であるから、 $t^n e^{-t} \leq t e^{-t}$ である。よって、両辺の $t=0$ から $t=1$ までの定積分を取ると、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t e^{-t} dt \\ &= \frac{a_1}{n!} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(1)および(2)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{e}}{n!} = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。また、 $a_n \geq 0$ であるので、 $\textcircled{1}$ とはさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(4)

$\{a_n\}$ の定義式より、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n e^{-t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{-1}{e} + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt \\ &= a_n - \frac{1}{e(n+1)!} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(5)

(4)より

$$\frac{1}{n!} = e(a_{n-1} - a_n)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} &= e \{ (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \} \\ &= e(a_1 - a_n) \end{aligned}$$

である。よって、(1)および(3)より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e(a_1 - a_n) \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{2}{e} \right) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e - 2$$