

1

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + x + 3} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}y' &= (x-2)^8 \cdot 6(2x+3)^5 \cdot 2 + 8(x-2)^7 \cdot (2x+3)^6 \\ &= 28x(x-2)^7(2x+3)^5\end{aligned}$$

である。

(答) $y' = 28x(x-2)^7(2x+3)^5$

(3)

(i)

$$t = \sqrt{3x+1}$$

とおくと、

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}t$$

x	0	$\rightarrow$	1
t	1	$\rightarrow$	2

であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3}(t^2 - 1) \cdot \frac{2}{3}t dt \\ &= \frac{2}{9} \int_1^2 (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{2}{9} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{27}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{8}{27}$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_2^{2e} \frac{1}{2} \log \frac{x}{2} dx &= \int_2^{2e} \left(\frac{x}{2} \right)' \log \frac{x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} \right]_2^{2e} - \int_2^{2e} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} dx \\ &= e - \int_2^{2e} \frac{1}{2} dx \\ &= e - \left[\frac{1}{2}x \right]_2^{2e} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

(答) 1

(1)

$$\begin{aligned}
 2x^2y + 5xy^2 - 6x^2 + 2y^3 - 6y^2 - 15xy &= 2x^2(y-3) + 5xy(y-3) + 2y^2(y-3) \\
 &= (y-3)(2x^2 + 5xy + 2y^2) \\
 &= (y-3)(2x+y)(x+2y)
 \end{aligned}$$

である。

(答) $(y-3)(2x+y)(x+2y)$

(2)

与えられた方程式の1つの解である,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2}{1-i} \\
 &= 1+i
 \end{aligned}$$

を与えられた方程式に代入して,

$$\begin{aligned}
 (1+i)^3 + p(1+i)^2 + q(1+i) + 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2p+q+2)i + q+4 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。 p, q は実数より, $2p+q+2, q+4$ も実数であるから, これが成り立つには,

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 2p+q+2=0 \\ q+4=0 \end{cases} \\
 \therefore &\begin{cases} p=1 \\ q=-4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

である。したがって, 与えられた方程式を解くと,

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 4x + 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x + 2) &= 0 \\
 \therefore x &= -3, 1 \pm i
 \end{aligned}$$

となるから, 他の解は $x = -3, 1-i$ である。

(答) $p=1, q=-4$, 他の解 $x = -3, 1-i$

(3)

(i)

対偶法による。命題 P の対偶は, ド・モルガンの法則より,

$$「a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば, } a+b \geq 0」$$

であり, これを示せばよい。 $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ のとき, 加法の性質より明らかに $a+b \geq 0$ が成り立つ。よって命題 P が真であることが示された。

(答) 真

(ii)

$a=2, b=-1$ のとき, $b < 0$ より $a < 0$ または $b < 0$ を満たすが, $a+b=1 > 0$ となり $a+b < 0$ を満たさないから, 命題 $Q: a < 0$ または $b < 0 \Rightarrow a+b < 0$ は偽であり, 反例は $a=2, b=-1$ である。

(答) 偽, 反例: $a=2, b=-1$

3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-a)^2 \\ &= x^3 - 2ax^2 + a^2x \\ f'(x) &= 3x^2 - 4ax + a^2 \\ &= (3x-a)(x-a) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{3}, a \end{aligned}$$

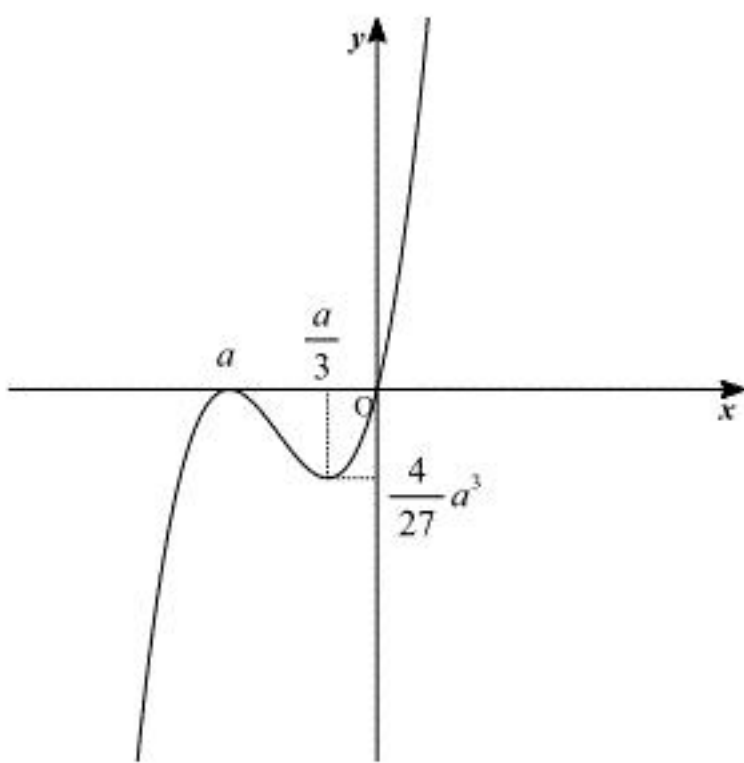
である。 $\frac{a}{3}$ と a の大小関係によって場合分けする。

[1] $\frac{a}{3} > a \Leftrightarrow a < 0$ のとき

$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	a	...	$\frac{a}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。

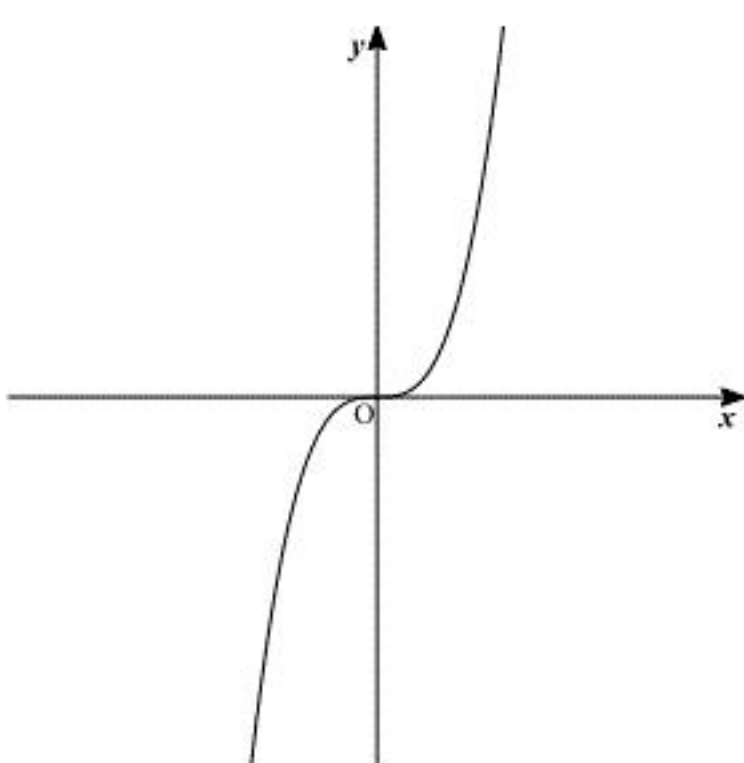


[2] $\frac{a}{3} = a \Leftrightarrow a = 0$ のとき

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ であるから、 $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。

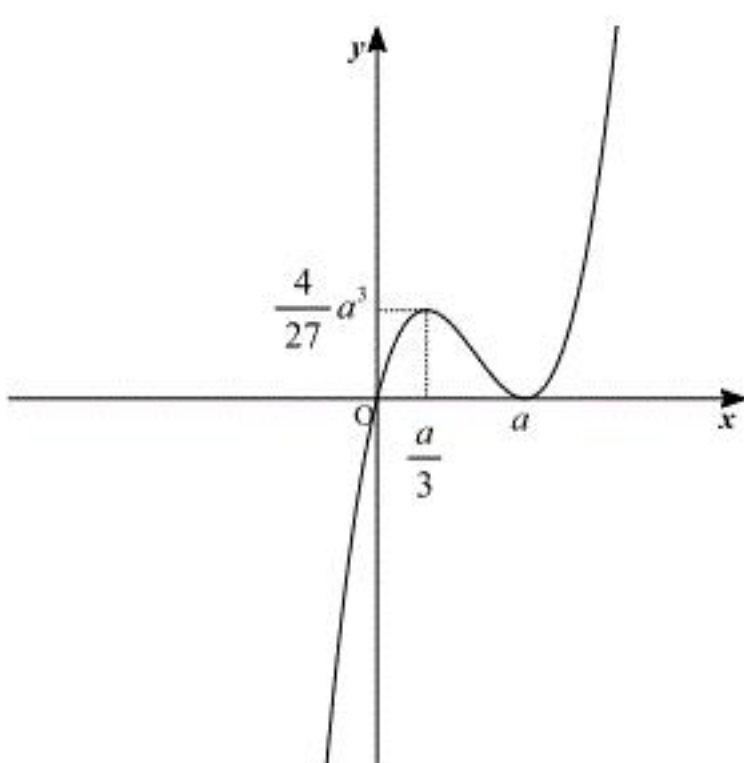


[3] $\frac{a}{3} < a \Leftrightarrow a > 0$ のとき

$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	...	$\frac{a}{3}$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

[1] $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^0 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{12}a^4 \end{aligned}$$

である。

[2] $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \frac{1}{12}a^4 \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $a \neq 0$ のとき、 $S(a) = \frac{1}{12}a^4$ である。よって、 $S(a) = \frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}a^4 &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow a^4 &= 4 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2)(a^2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

であるが、 a は 0 でない実数より、

$$\begin{aligned} a^2 - 2 &= 0 \\ \therefore a &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a) = \frac{1}{12}a^4$, $a = \pm\sqrt{2}$

(1)

第 k 群までの項の総数は、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k 2^{i-1} &= \frac{1 \cdot (2^k - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^k - 1\end{aligned}$$

である。よって、

$$2^6 - 1 + 10 = 73$$

より、第7群の小さい方から10番目の項は、奇数の列の第73項であるから、求める項は、 $2 \cdot 73 - 1 = 145$ である。

(答) 145

(2)

$555 = 2 \cdot 278 - 1$ より、555は奇数の列の第278項である。よって、555が第 k 群に属するとき、
(第 $k-1$ 群までの項の総数) $< 278 \leq$ (第 k 群までの項の総数)

$$\Leftrightarrow 2^{k-1} - 1 < 278 \leq 2^k - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{k-1} < 279 \leq 2^k$$

が成り立つ。 $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ より、この不等式を満たす自然数 k は、 $k=9$ だけである。よって、555は第9群に属する。

ここで、第8群までの項の総数は、 $2^8 - 1 = 255$ であるから、555は第9群の小さい方から
 $278 - 255 = 23$ 番目である。

(答) 第9群の小さい方から23番目

(3)

第 n 群を1つの数列と見ると、これは初項 $2(2^{n-1} - 1 + 1) - 1 = 2^n - 1$ 、公差2、項数 2^{n-1} の等差数列である。したがって、その和は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \{2(2^n - 1) + (2^{n-1} - 1) \cdot 2\} = 3 \cdot 4^{n-1} - 2^n$$

である。

(答) $3 \cdot 4^{n-1} - 2^n$