

平成 24 年度前期日程入学試験問題

数 学 C

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ③ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数 学 C

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定義する。次の各問に答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) すべての自然数 n に対して、次の漸化式が成り立つように実数 p, q を定めよ。

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

- (3) a_n が奇数なら a_{n+3} も奇数となり、 a_n が偶数なら a_{n+3} も偶数となることを示せ。

2 すべての実数 t に対して関数 $f(t), g(t)$ を

$$f(t) = e^t - e^{-t}, \quad g(t) = e^t + e^{-t}$$

と定義する。ただし、 e は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

- (1) すべての t に対して $g(t) \geq 2$ であることを示せ。
- (2) $f(t)$ は単調増加であることを示せ。
- (3) $x = f(t), s = e^t$ とするとき、 s を x を用いて表せ。
- (4) $x = f(t)$ の逆関数 $t = f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (5) 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ を $x = f(t)$ と置換積分して求めよ。
- (6) 座標平面上で t を媒介変数とする曲線

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

を考える。この曲線を、媒介変数 t を消去して x, y に関する方程式で表せ。

3

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定義する。ただし、 e は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $0 \leq t \leq 1$ のとき $t^n \leq t$ であることを用いて

$$a_n \leq \frac{a_1}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を示せ。

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(4) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{e(n+1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$ を求めよ。