

(1)

求める範囲は

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi$$

(2)

三角関数の合成公式より

$$f(x) = \sqrt{5} \sin(x + \alpha) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす角である。ここで、

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

であるから、 $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。(1)の結果より、 $x + \alpha$ のとりうる範囲は

$$\alpha \leq x + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \alpha, \frac{3}{4}\pi + \alpha \leq x + \alpha \leq \pi + \alpha$$

である。また、②より

$$\frac{\pi}{3} + \alpha > \frac{\pi}{2}, \pi < \pi + \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

であるから、①が最大値をとるのは

$$x + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

のときであり、最小値をとるのは

$$x + \alpha = \pi + \alpha$$

$$\therefore x = \pi$$

のときである。よって、求める最大値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sqrt{5} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha\right) \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

であり、最小値は

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \sqrt{5} \sin(\pi + \alpha) \\ &= -\sqrt{5} \sin \alpha \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \sqrt{5}, \text{ 最小値: } -2$$

(1)

求める確率は、A チームが最初の 4 試合で 3 勝 1 敗であり、かつ 5 試合目に勝利する確率であるから

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{648}{3125}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{648}{3125}$$

(2)

A チームが優勝した時点での勝敗数で場合分けをする。

[1] A チームが 4 勝 2 敗で優勝する場合

この場合の確率は、3 試合目から 6 試合目全てで A チームが勝利する確率であるから

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

である。

[2] A チームが 4 勝 3 敗で優勝する場合

この場合の確率は、A チームが 3 試合目から 6 試合目の 4 試合で 3 勝 1 敗であり、かつ 7 試合目に勝利する確率であり、これは(1)で求めた確率に等しい。すなわち、

$$\frac{648}{3125}$$

である。

以上, [1], [2]より, 求める確率は

$$\frac{81}{625} + \frac{648}{3125} = \frac{1053}{3125}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1053}{3125}$$

(3)

考えられる A チームの残りの試合での勝敗とその確率は以下の通りである。

5 試合目	6 試合目	7 試合目	試合数	確率
勝ち	勝ち	勝ち	3	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$
勝ち	勝ち	負け	3	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}$
勝ち	負け	—	2	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$
負け	—	—	1	$\frac{2}{5}$

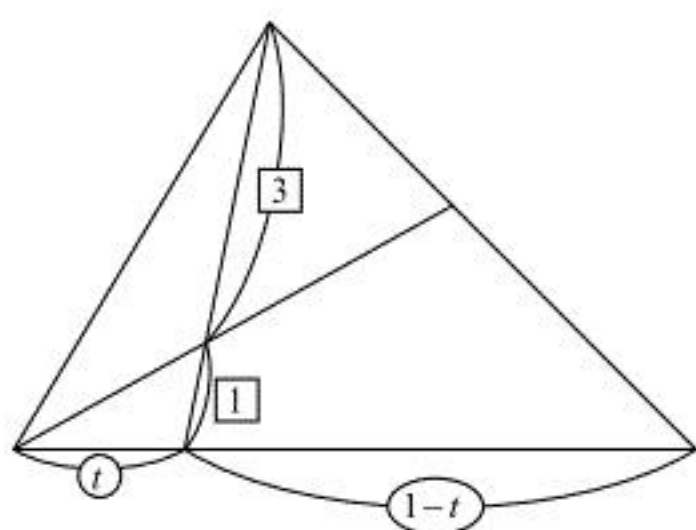
よって, 求める残りの試合数の期待値は

$$3 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} \right\} + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{49}{25}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{49}{25}$$

(1)



$\triangle OAB$ を図示すると上図のようになる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= t\overrightarrow{AB} \\ &= -t\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

である。

(答) $-t\vec{a} + t\vec{b}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle OAQ$ の面積が $\frac{1}{10}S$ となるのは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{10}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{10}\vec{b}\end{aligned}$$

のときであり、このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。ここで、点Pは線分AQ上の点であるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AQ}$$

と表される。①、②を代入すると

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} = -k\vec{a} + \frac{1}{10}k\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに一次独立であるから

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t = -k \\ \frac{3}{4}t = \frac{1}{10}k \end{cases}$$

であり、この連立方程式を解くと $t = \frac{1}{27}$, $k = \frac{5}{18}$ とわかる。

(答) $t = \frac{1}{27}$

(1)

 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

となるから

$$f'(0) = b$$

$$f'(1) = 3 - 2a + b$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(0) = b, f'(1) = 3 - 2a + b$$

(2)

 $f(x)$ が極大値と極小値を持つ条件は

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2ax + b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである。よって、①の判別式を D とすると、求める条件は

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\therefore a^2 - 3b > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a^2 - 3b > 0$$

(3)

 $f(x)$ が極大値をとるときの x の値を α 、極小値をとるときの x の値を β とおく。ここで、

$$\begin{aligned} & \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \\ &= \frac{\alpha^3 + \beta^3 - a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2}{2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 + b) - a(\alpha^2 + \beta^2)}{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、極大値と極小値の平均が 1 となるのは、

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 + b) - a(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

のときである。ここで、 α と β は 2 次方程式①の 2 つの異なる実数解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}a, \alpha\beta = \frac{b}{3}$$

である。また、このとき

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \frac{4a^2 - 6b}{9} \end{aligned}$$

である。これらを③に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}a \cdot \left(\frac{4a^2 - 6b}{9} - \frac{b}{3} + b \right) - a \cdot \frac{4a^2 - 6b}{9} = 0 \\ & \Leftrightarrow -4a^3 + 18ab = 0 \\ & \therefore a \left(\frac{2}{9}a^2 - b \right) = 0 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。よって、求める条件は②かつ④、すなわち

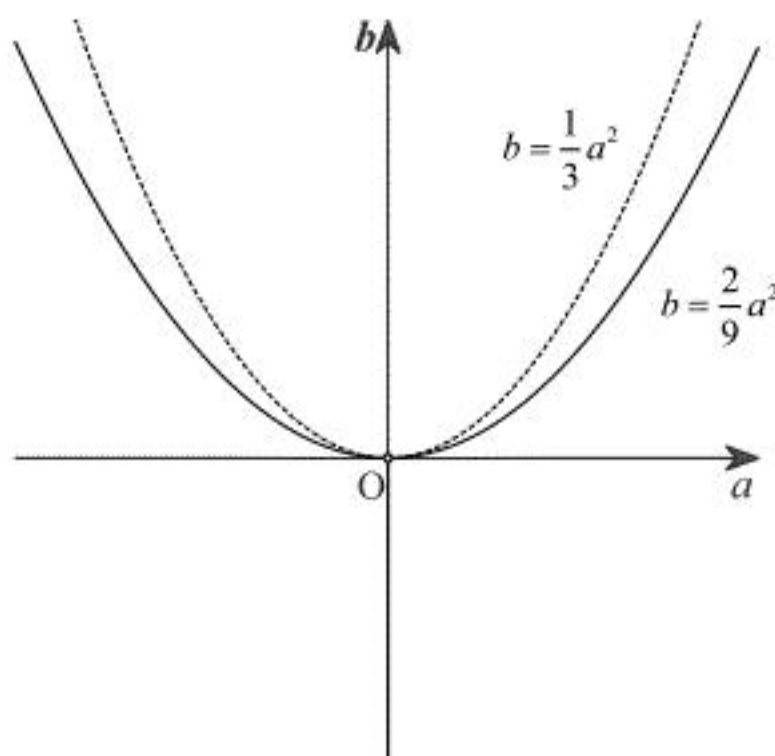
$$b < \frac{1}{3}a^2 \text{ のもとで、 } b = \frac{2}{9}a^2 \text{ または } a = 0$$

である。ここで、 $b = \frac{2}{9}a^2$ のとき、 $b < \frac{1}{3}a^2$ となるのは $a \neq 0$ のときである。また、 $a = 0$ のとき

$$b < \frac{1}{3}a^2 \Leftrightarrow b < 0$$

であるから、求める条件は

$$\begin{cases} b < 0 & (a = 0) \\ b = \frac{2}{9}a^2 & (a \neq 0) \end{cases}$$

となる。これを ab 平面上に図示すると下図の太線部ようになる。ただし、原点を含まない。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} b < 0 & (a = 0) \\ b = \frac{2}{9}a^2 & (a \neq 0) \end{cases}, \text{ 図示は前図}$$