

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\log_a ax)' \\
 &= \left(\frac{\log ax}{\log a} \right)' \\
 &= \frac{1}{\log a} \cdot \frac{a}{ax} \\
 &= \frac{1}{x \log a}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{x \log a}$$

(2)

$h(t) = t^2(t-5)^5$ とおき、その原始関数の1つを $H(t)$ とすると

$$g(x) = H(x^2 + 1) - H(1)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{d}{dx} H(x^2 + 1) \\
 &= (x^2 + 1)' \cdot h(x^2 + 1) \\
 &= 2x \cdot (x^2 + 1)^2 x^{10} \\
 &= 2x^{11} (x^2 + 1)^2
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) 2x^{11}(x^2 + 1)^2$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x} \right) dx \\
 &= \left[-x + 2 \log|1+x| \right]_0^1 \\
 &= 2 \log 2 - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) 2 \log 2 - 1$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^e \log \sqrt{x} \cdot 2(\sqrt{x})' dx \\
 &= \left[2\sqrt{x} \log \sqrt{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} dx \\
 &= 2 \left[\sqrt{x} \log \sqrt{x} - \sqrt{x} \right]_1^e \\
 &= 2 - \sqrt{e}
 \end{aligned}$$

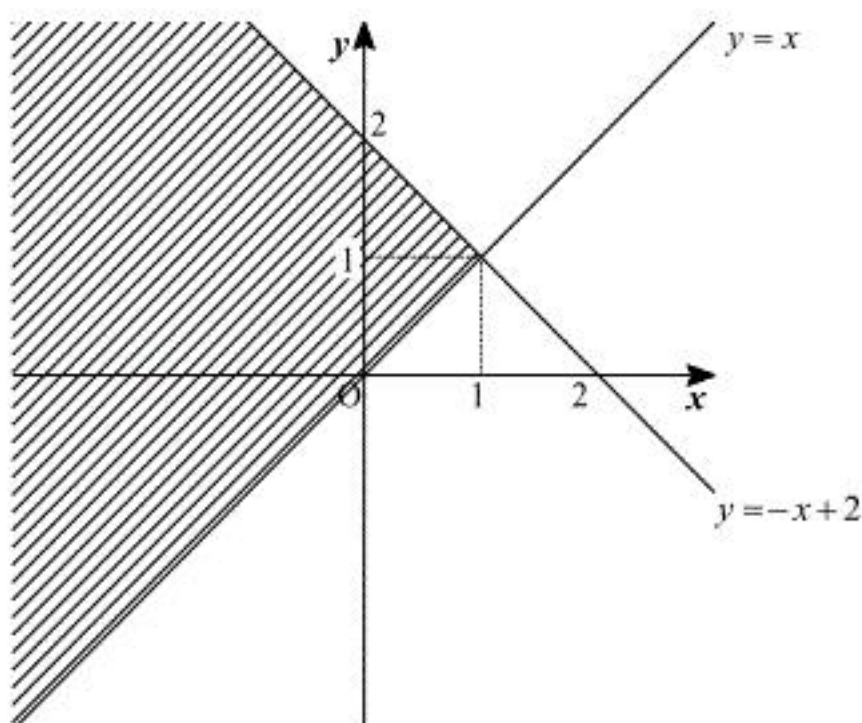
となる。

$$(\text{答}) 2 - \sqrt{e}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 x + |y-1| &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow |y-1| &\leq 1-x \\
 \Leftrightarrow -(1-x) &\leq y-1 \leq 1-x \\
 \Leftrightarrow x &\leq y \leq -x+2
 \end{aligned}$$

であるから、求める領域は下図の斜線部となる。ただし、境界線を含む。



(答) 前図の斜線部(ただし、境界線を含む)

(2)

条件より、行列 A の満たすべき条件は

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。以下、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもつか否かによって場合分けをする。

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもつとき

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件は

$$\begin{aligned}
 a-4 &\neq 0 \\
 \therefore a &\neq 4
 \end{aligned}$$

である。このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{a-4} \begin{pmatrix} a & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{a-4} \begin{pmatrix} 3a-4 & -4 \\ a-2 & -1 \\ 2a-6 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

であり、条件を満たす行列 A は存在する。

[2] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき

このとき

$$a=4$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となるが、これは問題の条件に反するため、このとき題意を満たす行列 A は存在しない。

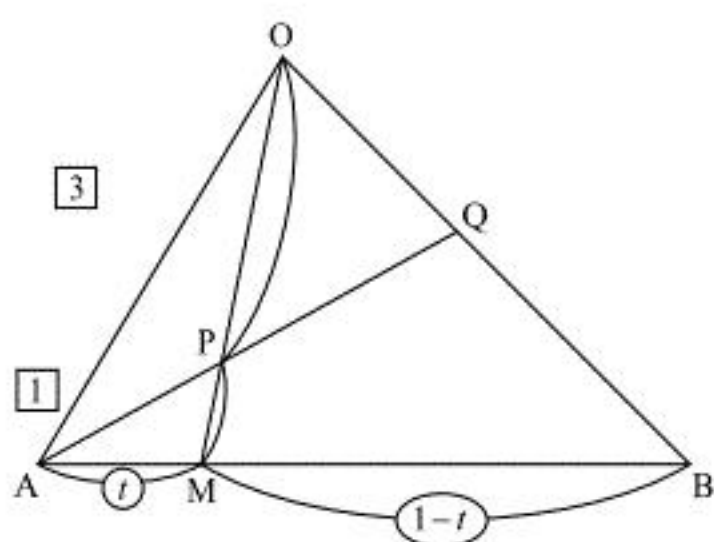
以上、[1], [2]より、 $a \neq 4$ のとき、条件を満たす行列 A は存在し

$$A = \frac{1}{a-4} \begin{pmatrix} 3a-4 & -4 \\ a-2 & -1 \\ 2a-6 & -1 \end{pmatrix}$$

である。また、 $a \neq 4$ のとき条件を満たす行列 A は存在しない。

(答) 前述

(1)



$\triangle OAB$ を図示すると上図のようになる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b}$$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle OAQ$ の面積が $\frac{1}{10}S$ となるのは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{10} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{10} \vec{b}\end{aligned}$$

のときであり、このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。ここで、点 P は線分 AQ 上の点であるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AQ}$$

と表される。①、②を代入すると

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} = -k\vec{a} + \frac{1}{10}k\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに一次独立であるから

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t = -k \\ \frac{3}{4}t = \frac{1}{10}k \end{cases}$$

であり、この連立方程式を解くと $t = \frac{1}{27}$, $k = \frac{5}{18}$ とわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{27}$$