

平成 25 年度前期日程入学試験問題

数 学 C

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、2 ページ(表紙、白紙を除く)です。試験開始後、確認して下さい。
- ③ 解答は、別紙の解答用紙に記入して下さい。
- ④ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入して下さい。

数 学 C

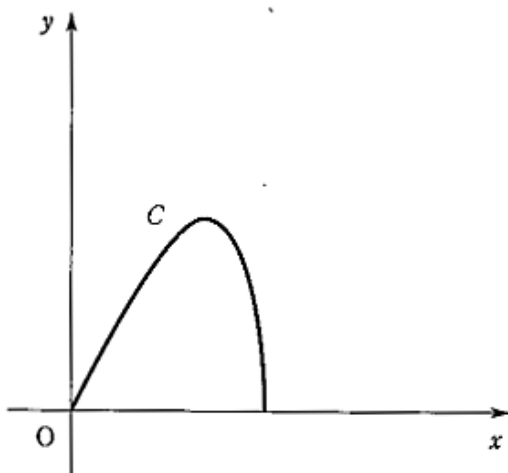
- 1 原点を O とする座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ が

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表されるとき、点 P の描く曲線を C とする。(C は下図のようにになっている。)

以下の各問に答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。
- (2) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、点 P における C の接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、(2) の接線 ℓ の傾きが負になる t の範囲を求めよ。
- (4) t が (3) で求めた範囲にあるとき、 ℓ と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ Q, R とし、三角形 OPQ と三角形 OPR の面積をそれぞれ S と T とする。 $c = \cos t$ として、 S, T をそれぞれ c を用いて表せ。
- (5) (4) の S と T について $S = T$ が成り立つとき、直線 OP の方程式を求めよ。



- 2 $f(x) = x^3 - x + 5$ として、曲線 $y = f(x)$ を C とする。点 $P(a, f(a))$ における C の接線を ℓ 、法線を n とする。以下の各問に答えよ。ただし、点 P における C の法線とは、点 P を通り、かつ点 P における C の接線に直交する直線のことである。

- (1) ℓ , n の方程式をそれぞれ求めよ。
- (2) ℓ と C の共有点で、 P 以外のものの個数を求めよ。
- (3) $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときには、 n と C との共有点が P 以外にも存在することを示せ。

- 3 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ とし、 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおく。また、2 次の単位行列を E で表す。以下の各問に答えよ。

- (1) $A^3 = E$ を示せ。
- (2) r を実数とする。自然数 k に対して、行列 $(rA)^{3k} + (rA)^{3k+1} + (rA)^{3k+2}$ の $(1, 1)$ 成分を a_k とおくと、 a_k を r を用いて表せ。
- (3) 自然数 N に対して $x_N = 2 \sum_{k=0}^N a_k$ とする。ただし a_k は、 $k \geq 1$ のときは (2) で定めたものとし、 $k = 0$ のときは $a_0 = 1 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2$ とおく。
 $-1 < r < 1$ のとき、 $f(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N$ を求めよ。
- (4) r が $-1 < r < 1$ の範囲を動くとき、(3) で定めた $f(r)$ のとりうる値の範囲を求めよ。