

1

(1)

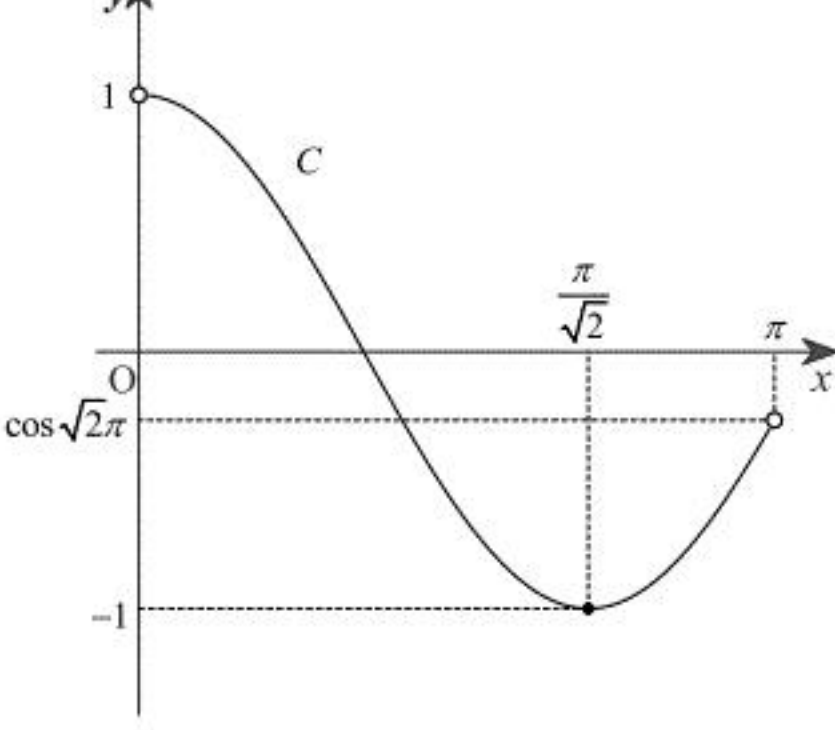
$f(x)=\cos(\sqrt{2}x)$ であるとき

$$f'(x)=-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$$

となるから、区間 $0 < x < \pi$ における関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	...	π
$f'(x)$	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\nearrow$

よって、 $y=f(x)$ のグラフ C の概形は下図のようになる。



また、 $f(x)$ は $x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ で最小値をとる。さらに、 C と x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{2}x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}x &= \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

(答) グラフ：前図、最小値を与える x の値： $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 、 C と x 軸との交点の x 座標： $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(2)

$f'(x)=-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$ であるから、 $0 < \theta < \pi$ の範囲において

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ のとき } f'(\theta) = 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \theta < \pi \text{ のとき } f'(\theta) &\neq 0 \end{aligned}$$

となる。

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \theta < \pi$ のとき

点 $P(\theta, \cos(\sqrt{2}\theta))$ における $C: y=f(x)$ の法線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(\theta)}(x-\theta) + f(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)}x - \frac{\theta}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} + \cos(\sqrt{2}\theta) \end{aligned}$$

である。

[2] $\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ のとき

点 $P(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, -1)$ における $C: y=f(x)$ の法線 ℓ の方程式は

$$x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \theta < \pi \text{ のとき} \quad \ell: y &= \frac{x}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} + \cos(\sqrt{2}\theta) \\ \theta &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad \ell: x &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3)

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \theta < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} \ell: y &= \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)}x - \frac{\theta}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} + \cos(\sqrt{2}\theta) \text{ と } x \text{ 軸の交点である点 } Q \text{ の } x \text{ 座標は} \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)}x - \frac{\theta}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} + \cos(\sqrt{2}\theta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)}x &= \frac{\theta}{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)} - \cos(\sqrt{2}\theta) \\ \Leftrightarrow x &= \theta - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)\cos(\sqrt{2}\theta) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

[2] $\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ のとき

$$\ell: x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ と } x \text{ 軸の交点である点 } Q \text{ の } x \text{ 座標は } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ である。}$$

以上、[1], [2]について、①に $\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を代入すると $x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ となることから、 $0 < \theta < \pi$ の範囲全

体において $Q(\theta - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)\cos(\sqrt{2}\theta), 0)$ となる。

$$\text{(答)} \quad (\theta - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)\cos(\sqrt{2}\theta), 0)$$

(4)

(1)の結果より、 θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くとき $-1 \leq \cos(\sqrt{2}\theta) < 1$ となるから $t = \cos^2(\sqrt{2}\theta)$

は $0 \leq t \leq 1$ を満たす。また、線分 PQ の長さを $g(\theta)$ とすると

$$\begin{aligned} \{g(\theta)\}^2 &= PQ^2 \\ &= \left\{ \theta - (\theta - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\theta)\cos(\sqrt{2}\theta)) \right\}^2 + \left\{ 0 - \cos(\sqrt{2}\theta) \right\}^2 \\ &= 2\sin^2(\sqrt{2}\theta)\cos^2(\sqrt{2}\theta) + \cos^2(\sqrt{2}\theta) \\ &= \cos^2(\sqrt{2}\theta)(2\sin^2(\sqrt{2}\theta) + 1) \\ &= \cos^2(\sqrt{2}\theta)(3 - 2\cos^2(\sqrt{2}\theta)) \end{aligned}$$

となり、 $t = \cos^2(\sqrt{2}\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} \{g(\theta)\}^2 &= t(3-2t) \\ &= -2t^2 + 3t \\ &= -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。 θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くとき、 t は $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くから、 $\{g(\theta)\}^2$ は

$$t = \frac{3}{4} \text{ のとき最大値 } \frac{9}{8}$$

をとる。 $g(\theta) \geq 0$ であるから、 $\{g(\theta)\}^2$ が最大値をとるとき $g(\theta)$ も最大値をとる。よって、

$g(\theta)$ は

$$t = \frac{3}{4} \text{ のとき最大値 } \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

をとる。

$$\text{(答)} \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ 最大値: } \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(5)

(4)の結果より $g(\theta)$ が最大値をとるとき

$$\begin{aligned} t &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \cos^2(\sqrt{2}\theta) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \cos(\sqrt{2}\theta) &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi \quad (\because 0 < \sqrt{2}\theta < \sqrt{2}\pi) \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}}, \frac{5}{6\sqrt{2}}\pi, \frac{7}{6\sqrt{2}}\pi \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \theta = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}, \frac{5}{6\sqrt{2}}\pi, \frac{7}{6\sqrt{2}}\pi$$

(1)

a, b はサイコロの目であるから、 $a, b = 1, 2, 3, \dots, 6$ である。 $f(x) = x^3 - ax + b$ であるとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - a \\ &= (\sqrt{3}x - \sqrt{a})(\sqrt{3}x + \sqrt{a}) \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。これより、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は

$$x = -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ のとき極大値 } \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}} \text{ のとき極小値 } -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b$$

をとる。

$$(\text{答}) \text{ 極大値: } \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b, \text{ 極小値: } -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b$$

(2)

3 次方程式 $f(x) = 0$ の解は、3 次関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標に相当する。よって、3 次方程式 $f(x) = 0$ が相異なる実数解をちょうど 2 つ持つとき、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が接するから、関数 $y = f(x)$ の極大値または極小値が 0 に等しくなる。ここで、

$a, b > 0$ であることより、極大値 $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b$ は正の値となるから、求める a, b の値の組は

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 27b^2 &= 4a^3 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

を満たす a, b の値の組となる。4 と 27 は互いに素な自然数であるから、 a^3 は 27 の倍数、 b^2 は 4 の倍数、つまり、 a は 3 の倍数、 b は 2 の倍数である。 $a, b = 1, 2, 3, \dots, 6$ であるから、考えられ得る (a, b) の値の組は

$$(a, b) = (3, 2), (6, 2), (3, 4), (6, 4), (3, 6), (6, 6)$$

であり、このうち①を満たすものは

$$(a, b) = (3, 2)$$

となる。

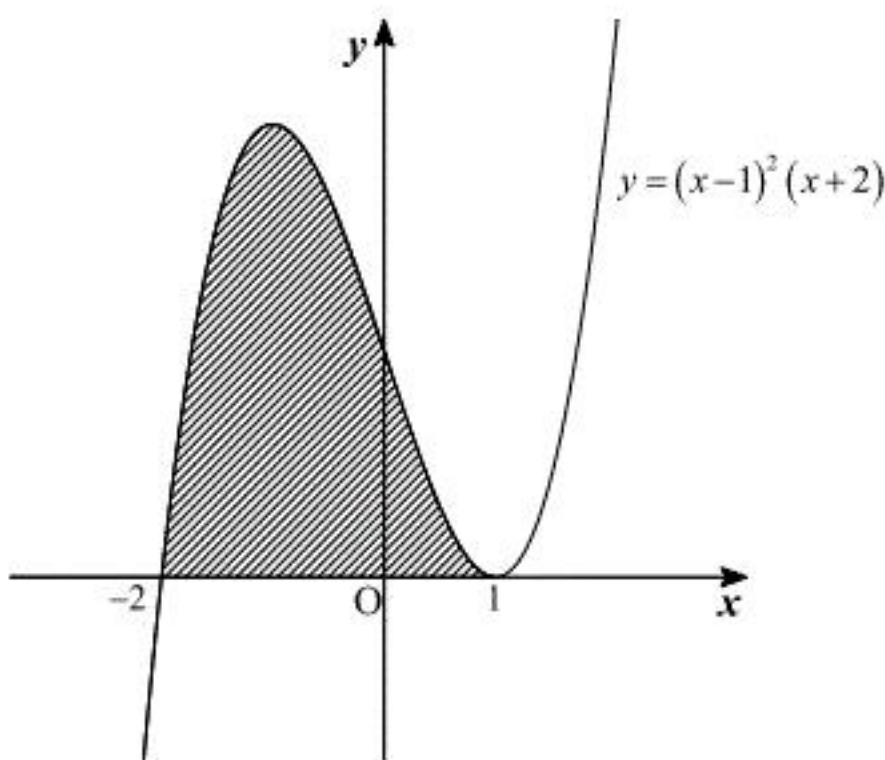
$$(\text{答}) (a, b) = (3, 2)$$

(3)

$(a, b) = (3, 2)$ であるとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x + 2 \\ &= (x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

となるから、曲線 $y = f(x)$ の概形は下図のようになる。



求める面積は上図の斜線部の領域の面積であるから

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x-1)^2(x+2) dx &= \int_{-2}^1 \{(x-1)^3 + 3(x-1)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^3 \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{27}{4}$$

(4)

サイコロを振ったとき、目の出方は同様に確からしいとする。 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解を持つのは

$$\text{「} f(x) \text{ の極大値} > 0 \text{」かつ「} f(x) \text{ の極小値} < 0 \text{」} \quad \cdots \text{②}$$

のときである。(2) の考察より $f(x)$ の極大値は常に正の値であるから、②は

$$f(x) \text{ の極小値} < 0$$

と同値である。よって、 (a, b) の満たすべき条件は

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} + b &< 0 \\ \Leftrightarrow b &< \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \Leftrightarrow b^2 &< \frac{4a^3}{27} \quad (\because a, b > 0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 &< \left(\frac{a}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

となり、これを満たす (a, b) の値の組は

$$\begin{aligned} &(2, 1) \\ &(3, 1) \\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3) \\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4) \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \end{aligned}$$

の 14 個であるから、求める確率は

$$\frac{14}{6^2} = \frac{7}{18}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{7}{18}$$

3

(1)

$$A+2E=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A(A+2E) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$A(A+2E)=a_1(A+2E)$$

を満たす a_1 の値は $a_1=3$ となる。また

$$A-3E=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A(A-3E) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$A(A-3E)=b_1(A-3E)$$

を満たす b_1 の値は $b_1=-2$ となる。

(答) $a_1=3, b_1=-2$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} A^n(A+2E) &= 3A^{n-1}(A+2E) \\ &= 3^2A^{n-2}(A+2E) \\ &= \cdots \\ &= 3^n(A+2E) \\ A^n(A-3E) &= -2A^{n-1}(A-3E) \\ &= (-2)A^{n-2}(A-3E) \\ &= \cdots \\ &= (-2)^n(A-3E) \end{aligned}$$

となるから

$$A^n(A+2E)=a_n(A+2E), A^n(A-3E)=b_n(A-3E)$$

を満たす a_n, b_n の値は

$$a_n=3^n, b_n=(-2)^n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。

(答) $a_n=3^n, b_n=(-2)^n$

(3)

$$A^n=c_nA+d_nE \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

とする。 $n=1$ のとき、 $\textcircled{2}$ より

$$c_1=1, d_1=0 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

である。 $n \geq 2$ のとき、(2)の結果より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A^{n-1}(A+2E)=3^{n-1}(A+2E) \\ A^{n-1}(A-3E)=(-2)^{n-1}(A-3E) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} A^n+2A^{n-1}=3^{n-1}(A+2E) \\ A^n-3A^{n-1}=(-2)^{n-1}(A-3E) \end{cases} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} 5A^n &= 3^n(A+2E)-(-2)^n(A-3E) \\ \Leftrightarrow A^n &= \frac{3^n-(-2)^n}{5}A + \frac{2 \cdot 3^n+3 \cdot (-2)^n}{5}E \end{aligned}$$

となる。 A は E の実数倍で表すことができないから、 $\textcircled{2}$ を満たす c_n, d_n の値は

$$c_n=\frac{3^n-(-2)^n}{5}, d_n=\frac{2 \cdot 3^n+3 \cdot (-2)^n}{5} \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

である。ここで、 $n=1$ とすると $\textcircled{3}$ を満たすから、すべての自然数 n に対して $\textcircled{4}$ は成り立つ。

(答) $c_n=\frac{3^n-(-2)^n}{5}, d_n=\frac{2 \cdot 3^n+3 \cdot (-2)^n}{5}$

(4)

$\textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} d_1+d_2+\cdots+d_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot 3^k+3 \cdot (-2)^k}{5} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{6(3^n-1)}{3-1} - \frac{6\{1-(-2)^n\}}{1+2} \right\} \\ &= \frac{3^{n+1}-3-2-(-2)^{n+1}}{5} \\ &= \frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}}{5} - 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ も用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}}{5} - 1}{3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3^n} \right\} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{a_n} = \frac{3}{5}$

(5)

二項定理より、

$$\begin{aligned} (-2)^n &= (3-5)^n \\ &= {}_nC_0 \cdot 3^n + {}_nC_1 \cdot 3^{n-1} \cdot (-5)^1 + \cdots + {}_nC_n \cdot (-5)^n \\ &= 3^n + \sum_{k=1}^n {}_nC_k \cdot 3^{n-k} \cdot (-5)^k \\ &= 3^n - 5 \cdot \sum_{k=1}^n {}_nC_k \cdot 3^{n-k} \cdot (-5)^{k-1} \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{3^n-(-2)^n}{5} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ 3^n - 3^n + 5 \cdot \sum_{k=1}^n {}_nC_k \cdot 3^{n-k} \cdot (-5)^{k-1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n {}_nC_k \cdot 3^{n-k} \cdot (-5)^{k-1} \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq k \leq n$ の範囲において、 ${}_nC_k, 3^{n-k}, (-5)^{k-1}$ はいずれも整数であるから、これらの和

と積で表される c_n は整数である。

(証明終)