

1

(1)

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^3}{-2+3i} &= \frac{-2+2i}{-2+3i} \\ &= \frac{(-2+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \\ &= \frac{10+2i}{13} \\ &= \frac{10}{13} + \frac{2}{13}i\end{aligned}$$

となるから、 $\frac{(1+i)^3}{-2+3i} = a+bi$ を満たす実数 a, b は

$$(a, b) = \left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13} \right)$$

となる。

$$(答) (a, b) = \left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13} \right)$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 32 & 48 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 32 & 48 \end{pmatrix}$$

(3)

$f(x) = (x+4)^{\frac{5}{6}}(3x+2)^{\frac{4}{3}}$ であるとき

$$f'(x) = \frac{5}{6}(x+4)^{-\frac{1}{6}} \cdot (3x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+4)^{\frac{5}{6}} \cdot 4(3x+2)^{\frac{1}{3}}$$

となるから

$$\begin{aligned}f'(0) &= \frac{5}{6} \cdot 4^{-\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 4^{\frac{5}{6}} \cdot 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{6} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{3} + 2^4 \\ &= \frac{53}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) f'(0) = \frac{53}{3}$$

(4)

区分求積法より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{3n} &= \int_0^1 \cos \frac{\pi}{3} x dx \\ &= \left[\frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} x \right]_0^1 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{3n} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

(1)

行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & b-1 \\ a^2-1 & b^2-1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないとき

$$\det(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b^2-1) - (b-1)(a^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b+1)(b-1) - (b-1)(a+1)(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(b-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a=1 \text{ または } b=1 \text{ または } a=b$$

となる。

(答) $a=1$ または $b=1$ または $a=b$

(2)

(1)の結果より、行列 A が逆行列をもたない a, b の条件は $a=1$ または $b=1$ または $a=b$ であり、さいころを2回振って出た目の数 a, b がこの条件を満たすのは

[1] $a=1$ かつ $b \neq 1$ である場合

[2] $a \neq 1$ かつ $b=1$ である場合

[3] $a=b$ である場合

である。

[1] $a=1$ かつ $b \neq 1$ である場合

このようになる目の出方は

$$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

の5通りある。

[2] $a \neq 1$ かつ $b=1$ である場合

このようになる目の出方は

$$(a, b) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$$

の5通りある。

[3] $a=b$ である場合

このようになる目の出方は

$$(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の6通りある。

以上、[1], [2], [3]は互いに排反であるから、行列 A が逆行列をもたないような目の出方は全部で16通りあるから、求める確率は

$$\frac{16}{6^2} = \frac{4}{9}$$

である。

(答) $\frac{4}{9}$

(1)

$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2$ であるもとの

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \end{aligned}$$

となる。次に、 $\overline{OP} = \frac{2}{3}\vec{a}$ であり、 $CP \perp OA$ であるから

$$\begin{aligned} \overline{CP} \cdot \overline{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{OP} - \vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} &= 2 \left(\because |\vec{a}| = \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

である。また、 $\overline{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b}$ であり、 $CQ \perp OB$ であるから

$$\begin{aligned} \overline{CQ} \cdot \overline{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{OQ} - \vec{c}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} &= \frac{4}{3} \left(\because |\vec{b}| = 2 \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \vec{c} \cdot \vec{a} = 2, \vec{c} \cdot \vec{b} = \frac{4}{3}$$

(2)

実数 s, t を用いて $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表されるから、(1)の結果より

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{a} &= 2 \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{a} &= 2 \\ \Leftrightarrow s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \\ \Leftrightarrow 3s + t &= 2 && \dots \textcircled{1} \\ \vec{c} \cdot \vec{b} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow s + 4t &= \frac{4}{3} && \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となるから、①、②より

$$(s, t) = \left(\frac{20}{33}, \frac{2}{11} \right)$$

である。よって

$$\vec{c} = \frac{20}{33}\vec{a} + \frac{2}{11}\vec{b}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{20}{33}\vec{a} + \frac{2}{11}\vec{b}$$

(3)

点 R は辺 AB 上の点であるから、実数 r を用いて $AR:RB = r:(1-r)$ とおくと

$$\overline{OR} = (1-r)\vec{a} + r\vec{b}$$

と表される。 $AB \perp CR$ であることより

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left\{ ((1-r)\vec{a} + r\vec{b}) - \left(\frac{20}{33}\vec{a} + \frac{2}{11}\vec{b} \right) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left\{ \left(\frac{13}{33} - r \right) \vec{a} + \left(r - \frac{2}{11} \right) \vec{b} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(r - \frac{13}{33} \right) |\vec{a}|^2 + \left(r - \frac{2}{11} \right) |\vec{b}|^2 + \left(\frac{19}{33} - 2r \right) \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(r - \frac{13}{33} \right) \cdot 3 + \left(r - \frac{2}{11} \right) \cdot 4 + \left(\frac{19}{33} - 2r \right) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} AR:RB &= \frac{4}{15} : \left(1 - \frac{4}{15} \right) \\ &= 4:11 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AR:RB = 4:11$$

(1)

3点 $P(t, 0, 0)$, $Q\left(t, \frac{1}{1+t^2}, 0\right)$, $R\left(t, 0, \frac{t}{1+t^2}\right)$ はいずれも平面 $x=t$ 上に存在し, $PQ \perp PR$ であることから, $\triangle PQR$ の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{1+t^2} \\ &= \frac{t}{2(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1 \cdot (1+t^2)^2 - t \cdot 2(1+t^2) \cdot 2t}{2(1+t^2)^4} \\ &= -\frac{(\sqrt{3}t-1)(\sqrt{3}t+1)}{2(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

であるから, 実数 t が $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき, 関数 $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

よって, $S(t)$ は

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき最大値 } S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{32} \left(t = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(2)

t の値が変化するとき, $\triangle PQR$ は yz 平面に平行に動くから, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 S(t) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{2(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{3}{40} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{3}{40}$$