$\boxed{2}$

(1)

2つの方程式を連立すると

$$-a^2x^2+1=a(x+1)$$
$$\Leftrightarrow a^2x^2+ax+a-1=0$$

となる。この判別式$D$が正となるとき，$C$と$\ell$は異なる2つの共有点をもつので

$$D>0$$
$$\Leftrightarrow a^2-4a^2(a-1)>0$$
$$\Leftrightarrow a^2(4a-5)<0$$
$$\Leftrightarrow a<\frac{5}{4}\ (\because a\neq 0)$$

となる。条件より$a>0$であるから，これとあわせて

$$0<a<\frac{5}{4}$$

が得られる。

(答) $0<a<\frac{5}{4}$

(2)

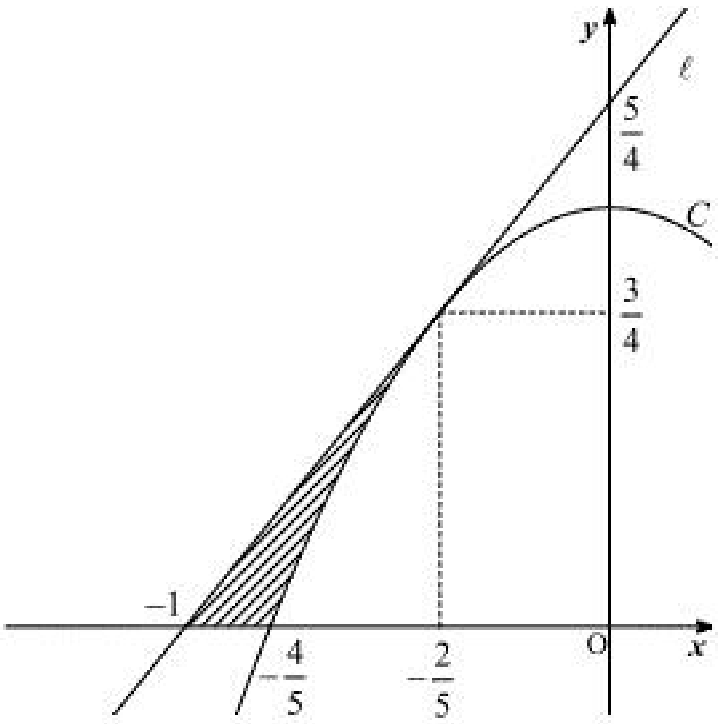
$\ell$が$C$に接するのは$D=0$のときであるから

$$a=\frac{5}{4}$$

である。このとき

$$C: y=-\frac{25}{16}x^2+1$$
$$\ell: y=\frac{5}{4}(x+1)$$

となる。これを図示すると以下のようになる。




したがって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left|-1-\left(-\frac{2}{5}\right)\right|\cdot\frac{3}{4}-\int_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{2}{5}}\left(-\frac{25}{16}x^2+1\right)dx=\frac{9}{40}-\left[-\frac{25}{48}x^3+x\right]_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{7}{120}$$

と求められる。

(答) $\frac{7}{120}$

**3**

(1)

与式の解のうち，自然数であるものを $m$ とする。これを与式に代入すると

$$2m^3-25m^2+(5n+2)m-35=0$$

$$\Leftrightarrow m\{2m^2-25m+(5n+2)\}=35 \qquad \cdots①$$

と表すことができる。$m$ は自然数であるから，35の約数である。

[1] $m=1$ のとき

①に代入して

$$2-25+5n+2=35$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{56}{5}$$

より，$n$ が自然数であることに反する。従って不適である。

[2] $m=5$ のとき

①に代入して

$$n=16$$

より，$n$ が自然数である。従ってこれは答えにふさわしい。

[3] $m=7$ のとき

①に代入して

$$n=16$$

より，$n$ が自然数である。従ってこれは答えにふさわしい。

[4] $m=35$ のとき

①に代入して

$$n=-\frac{1576}{5}$$

より，$n$ が自然数であることに反する。従って不適である。

以上[1]から[4]より

$$n=16$$

とわかる。

(答) $n=16$

(2)

$n=16$ を代入すると

$$2x^3-25x^2+82x-35=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-7)(2x-1)=0$$

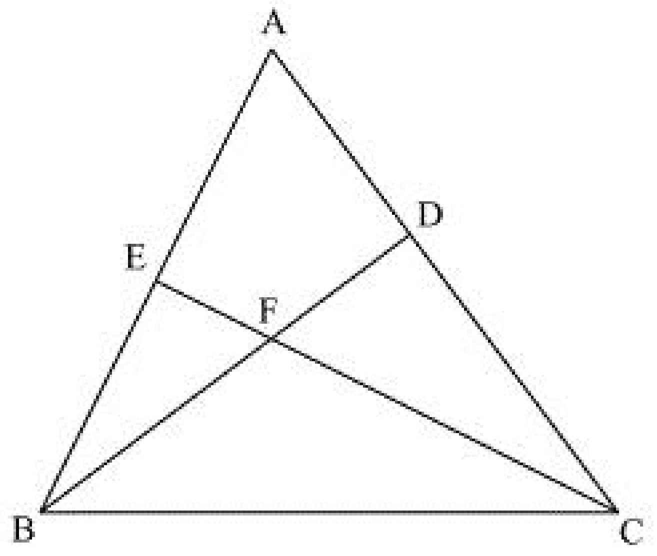
$$\therefore x=\frac{1}{2},\ 5,\ 7$$

とわかる。

(答) $x=\frac{1}{2},\ 5,\ 7$

## 4

(1)




$\angle AEF = \angle ADF = 90^\circ$ より，点 A, D, E, F は同一円周上にある。従って方べきの定理より

$$BE \cdot BA = BF \cdot BD$$
$$CD \cdot CA = CF \cdot CE$$

となる。この両辺を足し合わせると

$$BE \cdot BA + CD \cdot CA = BF \cdot BD + CF \cdot CE$$

が得られる。

(証明終)

(2)

点 A から BC に下ろした垂線の足を点 G とする。F は垂心より，線分 AG 上にある。ここで

$$\angle AEC = \angle AGC = 90^\circ$$

より，点 A, C, E, G は同一円周上にある。従って方べきの定理より

$$BG \cdot BC = BE \cdot BA$$

となる。これより

$$BG \cdot BC = BE \cdot BA$$
$$\Leftrightarrow (BC - CG) \cdot BC = BE \cdot BA$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = BE \cdot BA + BC \cdot CG \quad \cdots ①$$

と変形できる。また

$$\angle ADB = \angle AGB = 90^\circ$$

より，点 A, B, D, G は同一円周上にある。従って方べきの定理より

$$BC \cdot CG = CD \cdot CA$$

となる。これを①に代入して

$$BC^2 = BE \cdot BA + CD \cdot CA$$

と示せる。

(証明終)