$\boxed{1}$

(1)

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2x \cdot (-e^{-x}) = -2e^{-x}(x-1)$$
$$f''(x) = -2\{-e^{-x}(x-1) + e^{-x}\} = 2e^{-x}(x-2)$$

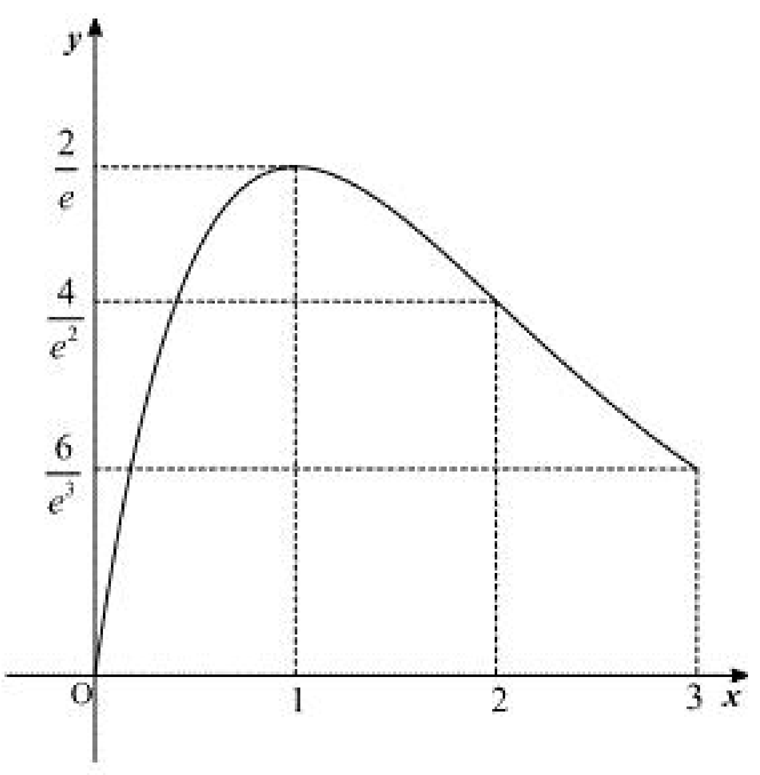
となる。これより増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−		−	
$f''(x)$		−		−	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↘	$f(3)$

よって,

$$f(0) = 0,\ f(1) = \frac{2}{e},\ f(2) = \frac{4}{e^2},\ f(3) = \frac{1}{e^3}$$

より, $f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{2}{e}$ をとり, 極小値は存在しない。また, 変曲点の座標は $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ である。増減表よりグラフの概形は下図のようになる。



(答) 増減：前表, 極値； $x=1$ のとき極大値 $\dfrac{2}{e^2}$, 極小値はなし, 変曲点： $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, 概形：前図

(2)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} J_a &= \int_0^1 x^2 e^{-ax} dx \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^1 x^2 \left(e^{-ax}\right)' dx \\ &= -\frac{1}{a}\left[x^2 e^{-ax}\right]_0^1 + \frac{2}{a}\int_0^1 x e^{-ax} dx \\ &= \frac{2}{a} I_a - \frac{1}{ae^a} \end{aligned}$$

となる。

(答) $J_a = \dfrac{2}{a} I_a - \dfrac{1}{ae^a}$

(3)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 2xe^{-x} dx \\ &= -\int_0^1 2x\left(e^{-x}\right)' dx \\ &= -\left[2xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx \\ &= -\frac{2}{e} + \left[-2e^{-x}\right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{4}{e} \end{aligned}$$

が得られる。よって, (2)より,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= 4J_2 \\ &= 4\left(\frac{2}{2} I_2 - \frac{1}{2e^2}\right) \\ &= 4I_2 - \frac{2}{e^2} \end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 xe^{-2x} dx \\ &= -\left[\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2e^2} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1 - \frac{5}{e^2}$$

が得られる。

(答) $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{4}{e},\ \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1 - \frac{5}{e^2}$

(4)

$V(t)$ は,

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi\int_0^1 |f(x) - t|^2 dx \\ &= \pi\left\{\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - 2t\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 t^2 dx\right\} \\ &= \pi\left\{1 - \frac{5}{e^2} - 2t\left(2 - \frac{4}{e}\right) + t^2\right\} \\ &= \pi\left[\left\{t - \left(2 - \frac{4}{e}\right)\right\}^2 - 3 + \frac{16}{e} - \frac{21}{e^2}\right] \end{aligned}$$

と表せるので, 最小値は $t = 2 - \dfrac{4}{e}$ のとき $\left(-3 + \dfrac{16}{e} - \dfrac{21}{e^2}\right)\pi$ である。

(答) $t = 2 - \dfrac{4}{e}$ のとき $\left(-3 + \dfrac{16}{e} - \dfrac{21}{e^2}\right)\pi$

2

(1)

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$ より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PR}\right|^2&=\left|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}+\left|\overrightarrow{QR}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-2\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}+\left|\overrightarrow{QR}\right|^2\\&=2a^2+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{2a^2+\frac{2}{3}}\ \left(\because\left|\overrightarrow{PR}\right|>0\right)$$

となる。

(答) $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{2a^2+\dfrac{2}{3}}$

(2)

$\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}$ のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\left|\overrightarrow{QP}\right|\left|\overrightarrow{QR}\right|\cos\theta$$

となり，$0\leqq\angle PQR\leqq\pi$ のとき，$\angle PQR=\theta$ を満たす。よって，$\angle PQR=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$-\frac{1}{3}=a^2\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$\Leftrightarrow a^2=\frac{2}{3}$$
$$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{3}\ (\because a>0)$$

である。また，$\angle PQR=\pi$ のとき

$$-\frac{1}{3}=a^2\cos\pi$$
$$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{3}$$
$$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because a>0)$$

である。

(答) $\angle PQR=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\angle PQR=\pi$ のとき $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)

(2)より

$$\cos\theta=-\frac{1}{3a^2}$$

である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，

$$-1\leqq\cos\theta\leqq1$$
$$\Leftrightarrow-1\leqq-\frac{1}{3a^2}\leqq1$$
$$\Leftrightarrow a\leqq-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\leqq a$$

となる。$a>0$ より，a がとり得る範囲は

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq a$$

となる。

(答) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq a$

(4)

P の座標を (x,y) とする。(1)より

$$\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{2a^2+\frac{2}{3}}$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=2a^2+\frac{2}{3}\qquad\cdots①$$

である。また，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ より

$$x^2+y^2=a^2\qquad\cdots②$$

である。①，②から a を消去すると

$$(x+1)^2+y^2=\frac{4}{3}\qquad\cdots③$$

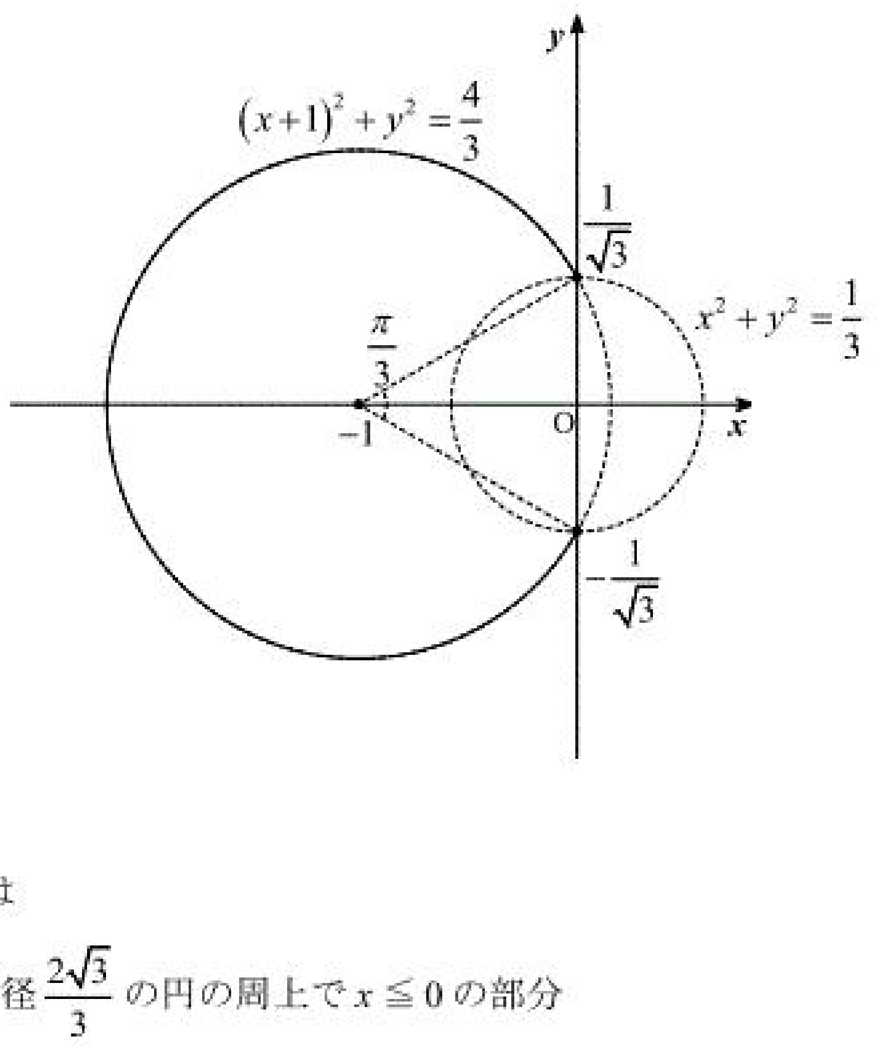
が得られる。(3)より，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq a$ であるから，②と合わせて，求める軌跡上の点は

$$x^2+y^2\geqq\frac{1}{3}$$

を満たす。③と $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$ の交点は

$$2x+1=1$$
$$\Leftrightarrow x=0$$
$$\therefore(x,y)=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

となるから，求める軌跡は下図のようになる。



したがって，P の軌跡は

中心 $(-1,0)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の円の周上で $x\leqq0$ の部分

である。

(答) 中心 $(-1,0)$，半径 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の円の周上で $x\leqq0$ の部分

(5)

③と $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$ の交点の間の距離は $2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であるから，3点 $(-1,0)$，$\left(0,\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ からなる三角形は1辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の正三角形である。したがって，図より，

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5\pi}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}\pi$$

と求められる。

(答) $\dfrac{10\sqrt{3}}{9}\pi$

3

(1)

$y=\log x$ について，x で微分すると

$$y'=\frac{1}{x}$$

より，点Pでの接線の傾きは $\frac{1}{t}$ であるから，法線の傾きは $-t$ である。したがって，法線 ℓ の方程式は

$$y=-t(x-t)+\log t$$
$$\therefore y=-tx+t^2+\log t$$

とわかる。

(答) $y=-tx+t^2+\log t$

(2)

ℓ と C_2 の方程式を連立することで，交点の x 座標に関する方程式

$$-tx+t^2+\log t=-x^2+a$$
$$\Leftrightarrow x^2-tx+t^2+\log t-a=0 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

を得る。①の判別式を D とすると，ℓ と C_2 が接するとき $D=0$ となるので

$$D=0$$
$$\Leftrightarrow t^2-4\left(t^2+\log t-a\right)=0$$
$$\therefore a=\log t+\frac{3}{4}t^2$$

である。このとき，①より，

$$x^2-tx+\frac{1}{4}t^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}t\right)^2=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{2}t$$

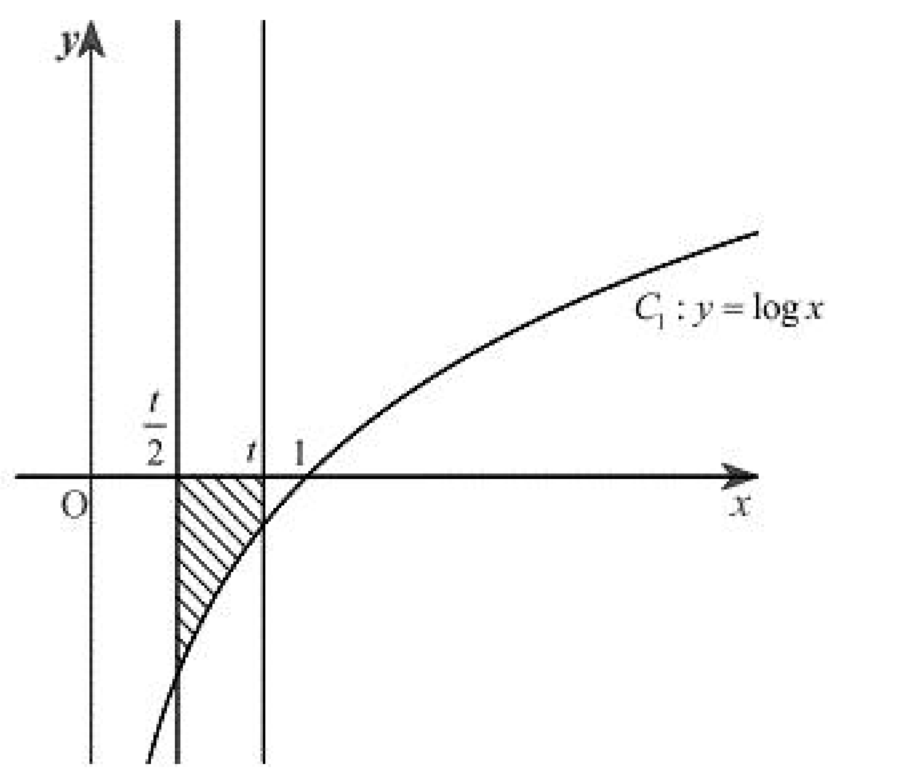
が得られ，接点Qの座標は $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t^2+\log t\right)$ とわかる。

(答) $a=\log t+\frac{3}{4}t^2$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t^2+\log t\right)$

(3)

$y=\log x$ と x 軸の上下関係に注目して場合分けをする。

[1] $0<t<1$ のとき

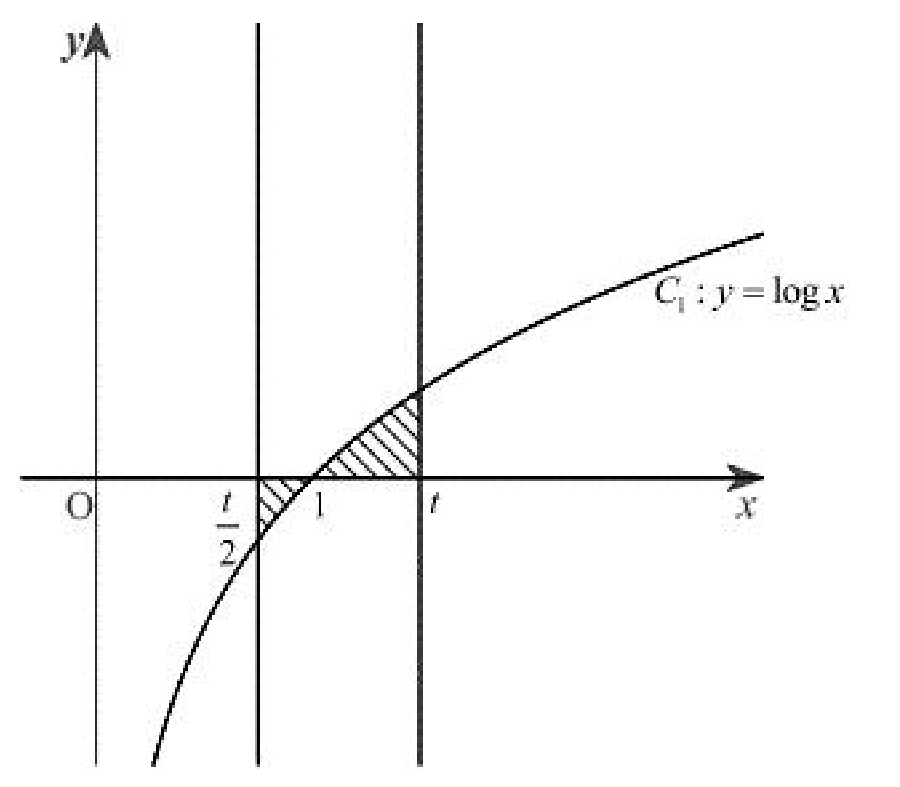


$\frac{1}{2}t<t<1$ より，$S(t)$ は上図における斜線部の面積であるから，

$$S(t)=\int_{\frac{1}{2}t}^{t}|\log x|dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{2}t}^{t}\log x dx$$
$$=-\left[x\log x-x\right]_{\frac{1}{2}t}^{t}$$
$$=-t\log t+t+\frac{1}{2}t\log\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t$$
$$=\frac{t}{2}(1-\log 2t)$$

である。

[2] $1\leqq t<2$ のとき

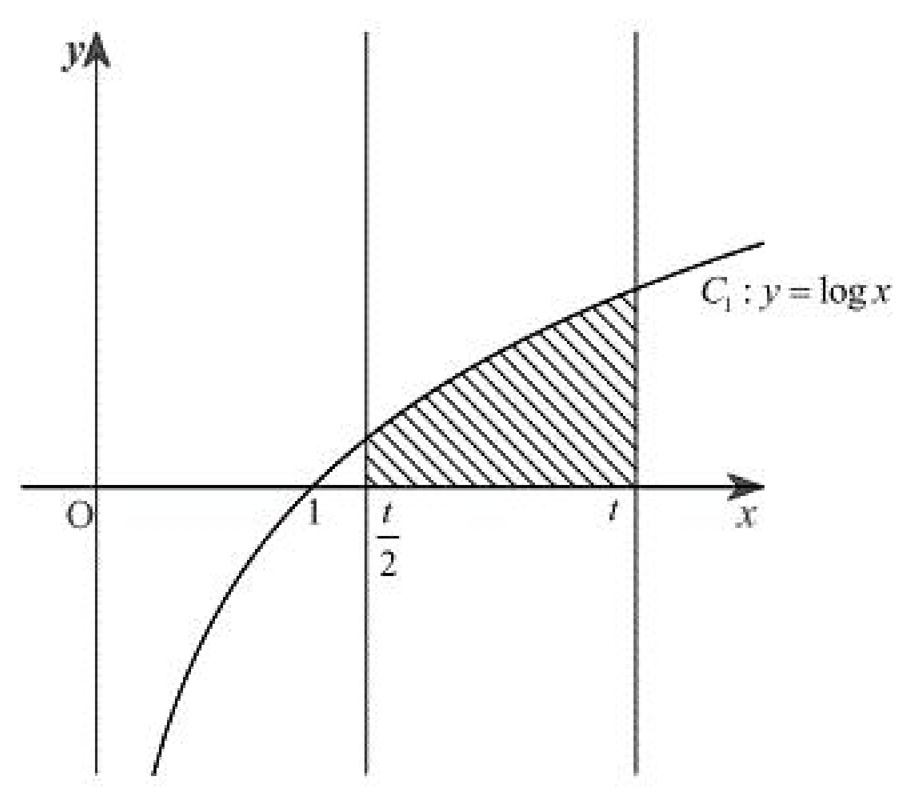


$\frac{1}{2}t<1\leqq t$ より，$S(t)$ は上図における斜線部の面積であるから，

$$S(t)=\int_{\frac{1}{2}t}^{t}|\log x|dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{2}t}^{1}\log x dx+\int_{1}^{t}\log x dx$$
$$=-\left[x\log x-x\right]_{\frac{1}{2}t}^{1}+\left[x\log x-x\right]_{1}^{t}$$
$$=\frac{3}{2}t\log t-\frac{t}{2}\log 2-\frac{3}{2}t+2$$

である。

[3] $2\leqq t$ のとき



$1\leqq\frac{1}{2}t<t$ より，$S(t)$ は上図における斜線部の面積であるから，

$$S(t)=\int_{\frac{1}{2}t}^{t}|\log x|dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}t}^{t}\log x dx$$
$$=\left[x\log x-x\right]_{\frac{1}{2}t}^{t}$$
$$=\frac{t}{2}(\log 2t-1)$$

である。

以上, [1], [2], [3]より，

$$S(t)=\begin{cases}\frac{t}{2}(1-\log 2t) & (0<t<1\text{のとき})\\ \frac{3}{2}t\log t-\frac{t}{2}\log 2-\frac{3}{2}t+2 & (1\leqq t<2\text{のとき})\\ \frac{t}{2}(\log 2t-1) & (2\leqq t\text{のとき})\end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(4)

(3)の場合分けごとに $S'(t)$ を考える。

[1] $0<t<1$ のとき

$$S'(t)=\frac{1}{2}(1-\log 2t)+\frac{t}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\log 2t$$

となり，$S'(t)=0$ となるのは $t=\frac{1}{2}$ のときである。

[2] $1\leqq t<2$ のとき

$$S'(t)=\frac{3}{2}\log t+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log 2-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{t^3}{2}$$

となり，$S'(t)=0$ となるのは $t=\sqrt[3]{2}$ のときである。

[3] $2\leqq t$ のとき

$$S'(t)=\frac{1}{2}\log 2t$$

となり，$S'(t)=0$ となるような t は存在しない。

以上, [1], [2], [3]より増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		+	0	−		−	0	+		+
$S(t)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘		↘	$2-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	↗		↗

これより，極小値は $S\left(\sqrt[3]{2}\right)=2-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ であり，極大値は $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ とわかる。

(答) 極小値 $2-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$，極大値 $\frac{1}{4}$