$\boxed{1}$

(1)

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=2x\sqrt{1+\log x}+x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\log x}}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2x\sqrt{1+\log x}+\frac{x}{2\sqrt{1+\log x}}$$

となる。これより

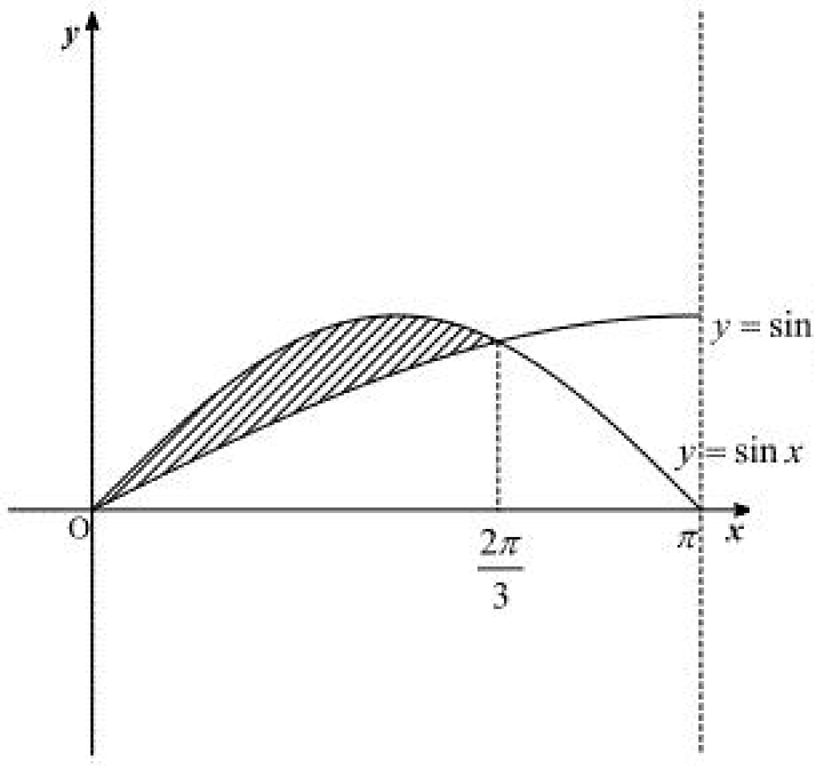
$$f'(e^3)=2e^3\sqrt{1+\log e^3}+\frac{e^3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\log e^3}}$$
$$=\frac{17e^3}{4}$$

とわかる。

(答) $f'(e^3)=\dfrac{17e^3}{4}$

(2)

求める面積は下図の斜線部の面積である。



$y=\sin x$ と $y=\sin\dfrac{x}{2}$ の交点は

$$\sin x=\sin\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\therefore \sin\frac{x}{2}=0 \text{ または } \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots ①$$

を満たす。$0\leqq x\leqq \pi$ のとき

$$0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$$

であるから①を満たす x は

$$x=0,\ \frac{2\pi}{3}$$

とわかる。これより，求める面積は

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\dfrac{1}{2}$

(3)

$$f(x)=\int_2^x t^2 2^{t^2}\,dt$$

とおくと

$$f'(x)=x^2 2^{x^2}$$

$$f(2)=0$$

となる。これより与式は

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2 2^{t^2}\,dt=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x^2+2x+4)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

となる。微分係数の定義より

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2 2^{t^2}\,dt=\frac{1}{2^2+2\cdot2+4}\cdot f'(2)$$
$$=\frac{16}{3}$$

とわかる。

(答) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x^3-8}\int_2^x t^2 2^{t^2}\,dt=\frac{16}{3}$

$\boxed{2}$

(1)

$a+b+1=0$ より

$$a+b=-1$$

となる。この両辺を3乗すると

$$(a+b)^3=-1$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3=-1-3a^2b-3ab^2 \quad \cdots ①$$

を得る。一方，与式は

$$\frac{b^2}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{a^2}{b}=\frac{a^3+b^3+1}{ab}$$

となる。これに①を代入して

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{a^2}{b}&=\frac{-3a^2b-3ab^2}{ab}\\&=\frac{-3ab(a+b)}{ab}\\&=-3(a+b)\ (\because a\neq 0,\ b\neq 0)\\&=3\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{a^2}{b}=3$

(2)

方程式の解を $x=\alpha-2,\ \alpha,\ \alpha+2$ とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(\alpha-2)\alpha(\alpha+2)=-(m+1)\\(\alpha-2)\alpha+\alpha(\alpha+2)+(\alpha+2)(\alpha-2)=-1\\(\alpha-2)+\alpha+(\alpha+2)=m+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3-4\alpha=-m-1\\3\alpha^2-4=-1\\3\alpha=m+1\end{cases}$$

となる。これを解くと

$$(\alpha,\ m)=(1,\ 2),\ (-1,\ -4)$$

とわかり，求める m の値は $2,\ -4$ である。

(答) $m=2,\ -4$

(3)

二項定理を用いて

$$\begin{aligned}21^{2015}&=(20+1)^{2015}\\&=\sum_{k=0}^{2015}{}_{2015}\mathrm{C}_k\,20^k\\&=1+{}_{2015}\mathrm{C}_1\cdot 20+{}_{2015}\mathrm{C}_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{2015}\mathrm{C}_{2014}\cdot 20^{2014}+{}_{2015}\mathrm{C}_{2015}\cdot 20^{2015}\\&=1+40300+400a\\&=301+400(a+100)\end{aligned}$$

となる。ただし，$a={}_{2015}\mathrm{C}_2\cdot 1+\cdots+{}_{2015}\mathrm{C}_{2015}\cdot 20^{2013}$ である。このとき，a は整数であるから，21^{2015} を400で割ったときの余りは301とわかる。

(答) 301

$\boxed{3}$

(1)

問題文より

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\6\\6\end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

となるので

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$

がわかる。よって，点Pの座標は$(2, 1, 4)$である。

(答)　$P(2, 1, 4)$

(2)

実数s, t, uを用いてL, M, Nを

$$L(s, 0, 0)$$
$$M(0, t, 0)$$
$$N(0, 0, u)$$

と表す。点L, M, Nは平面α上の点であるから

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PL}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PN}=0$$

を満たす。これより

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$$
$$\Leftrightarrow -1\cdot(s-2)+2\cdot(-1)+2\cdot(-4)=0$$
$$\Leftrightarrow s=-8$$
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PM}=0$$
$$\Leftrightarrow -1\cdot(-2)+2\cdot(t-1)+2\cdot(-4)=0$$
$$\Leftrightarrow t=4$$
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PN}=0$$
$$\Leftrightarrow -1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+2\cdot(u-4)=0$$
$$\Leftrightarrow u=4$$

とわかる。これより，求める体積は，△OMLを底辺とする高さONの三角錐の体積であるから，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\cdot 4=\frac{64}{3}$$

となる。

(答)　$\dfrac{64}{3}$

4

(1)

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を x で微分すると

$$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

となるので，点Pにおける曲線 C の接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t\sqrt{t}}(x-t)+\frac{1}{\sqrt{t}}$$
$$\therefore y=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}x+\frac{3}{2\sqrt{t}}$$

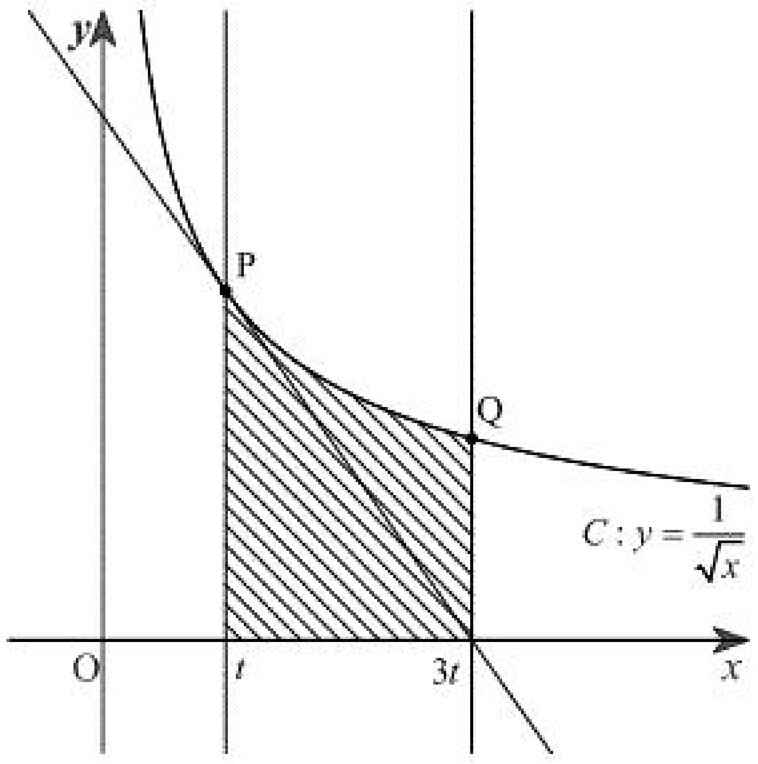
である。Qは x 軸との交点であるから

$$0=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}x+\frac{3}{2\sqrt{t}}$$
$$\Leftrightarrow x=3t$$

より，$\mathrm{Q}(3t,0)$ である。

(答) $\mathrm{Q}(3t,0)$

(2)



求める体積は，上図における斜線部を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積であるから，

$$\pi\int_t^{3t}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_t^{3t}\frac{1}{x}dx$$
$$=\pi\Big[\log|x|\Big]_t^{3t}$$
$$=\pi\log 3$$

となる。

(答) $\pi\log 3$

(3)

$L(t)$ は

$$L(t)=\sqrt{(3t-t)^2+\left(0-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4t^2+\frac{1}{t}}$$

となる。この根号内が最小になる t において，$L(t)$ も最小となる。ここで

$$f(t)=4t^2+\frac{1}{t}$$

とおき，t で微分すると

$$f'(t)=8t-\frac{1}{t^2}$$
$$=\frac{1}{t^2}(8t^3-1)$$
$$=\frac{1}{t^2}(2t-1)(4t^2+2t+1)$$

となるので，増減表は以下の通りである。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$
$f(t)$	/	↘		↗

したがって，$L(t)$ の最小値は

$$L\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$
$$=\sqrt{3}$$

である。

(答) $\sqrt{3}$