平成27年度前期日程入学試験問題

数　学 C

理　学　部

注意事項

① 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，2ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認しなさい。

③ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

④ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。

数　　学 C

1　$f(x)=2xe^{-x}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。以下の各問に答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ。

(2)　正の実数 a に対して，$I_a=\int_0^1 xe^{-ax}dx$，$J_a=\int_0^1 x^2e^{-ax}dx$ とおく。J_a を I_a と a を用いて表せ。

(3)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ および $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ を求めよ。

(4)　曲線 $y=f(x)$ と，3 直線 $x=0$，$x=1$ および $y=t$ で囲まれた図形を，直線 $y=t$ を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。t を動かしたとき，$V(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

2　座標平面上の相異なる 3 点 P，Q，R が 2 つの条件

$$(*)\quad \begin{cases} |\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QR}| \\ \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

を満たしながら動くものとする。$|\overrightarrow{PQ}|$ を a とする。以下の各問に答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{PR}|$ を a で表せ。

(2)　$\angle PQR=\dfrac{2}{3}\pi$ のときの a を求めよ。また，$\angle PQR=\pi$ のときの a を求めよ。

(3)　a がとり得る値の範囲を求めよ。

(4)　原点を O とし，点 R を $(1,0)$ に固定する。点 P，Q が $(*)$ および

$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{PQ}|$$

を満たしながら動くとする。点 P が描く軌跡を求めよ。

(5)　(4)において，点 P が描く軌跡の長さを求めよ。

3 曲線 $C_1 : y = \log x\ (x > 0)$ と曲線 $C_2 : y = -x^2 + a$ を考える。ただし，log は自然対数を表す。以下の各問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における法線 ℓ の方程式を求めよ。ただし，曲線上の点 P における法線とは，点 P を通り，点 P における接線に垂直に交わる直線のことである。

(2) (1)で求めた法線 ℓ と曲線 C_2 が接するとき，a の値を t を用いて表せ。また，C_2 と ℓ が接する点 Q の座標を t を用いて表せ。

(3) (2)で求めた点 Q を通り y 軸に平行な直線，点 P を通り y 軸に平行な直線，x 軸，および曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) (3)で求めた $S(t)$ の極値を求めよ。