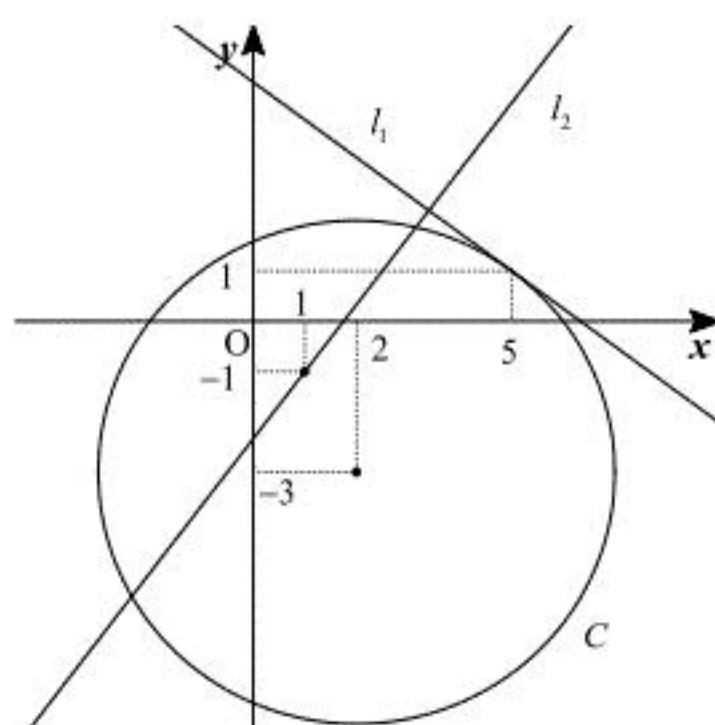


1

(1)



円 C の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

となるから、円 C は点 $(2, -3)$ を中心とする半径 5 の円である。点 $(5, 1)$ における接線は、

$$\begin{aligned} (5-2)(x-2) + (1+3)(y+3) &= 25 \\ \Leftrightarrow 3x + 4y &= 19 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで直線 l_1, l_2 は直交して、直線 l_1 の傾きは $-\frac{3}{4}$ であることから直線 l_2 の傾きを m とすると、

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot m &= -1 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

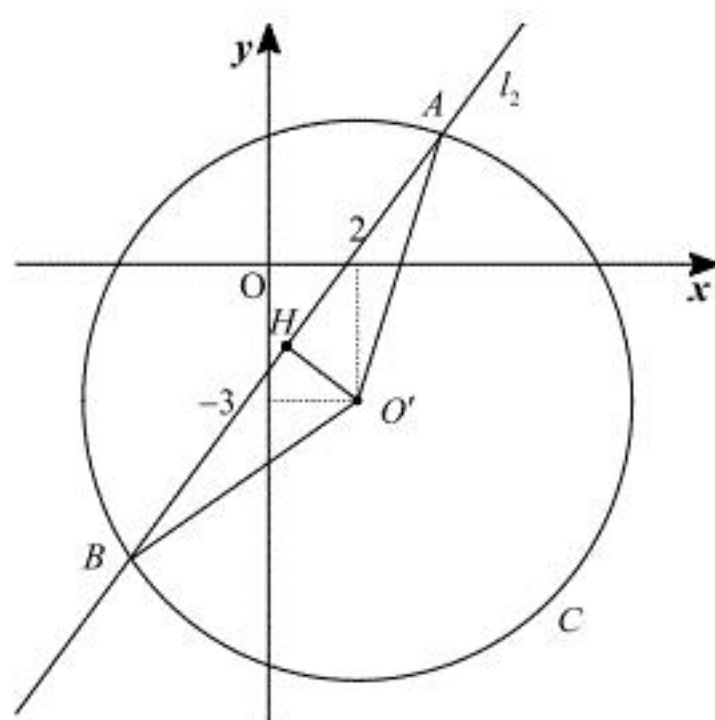
となる。直線 l_2 は傾きが $\frac{4}{3}$ で、点 $(1, -1)$ を通る直線であるから、

$$\begin{aligned} y+1 &= \frac{4}{3}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}, l_2: y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

(2)



直線 l_2 と円 C の中心 $(2, -3)$ の距離を d とすると、直線 l_2 が $4x - 3y - 7 = 0$ と表せることから、 d の値は点と直線の距離の公式より

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$$

となる。ここで、直線 l_2 と円 C の交点で x 座標が大きい方を点 A 、 x 座標が小さい方を点 B 、円 C の中心 $(2, -3)$ を点 O' 、点 O' から直線 l_2 に下した垂線の足を点 H とする。線分 $O'H$ の長さは 2 、線分 $O'A$ の長さは 5 であり、 $\triangle O'HA$ は $\angle O'HA = 90^\circ$ の直角三角形であることから三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{O'A^2 - O'H^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

となる。対称性から $BH = \sqrt{21}$ であり、 $AB = 2\sqrt{21}$ となる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{21}$$

(1)

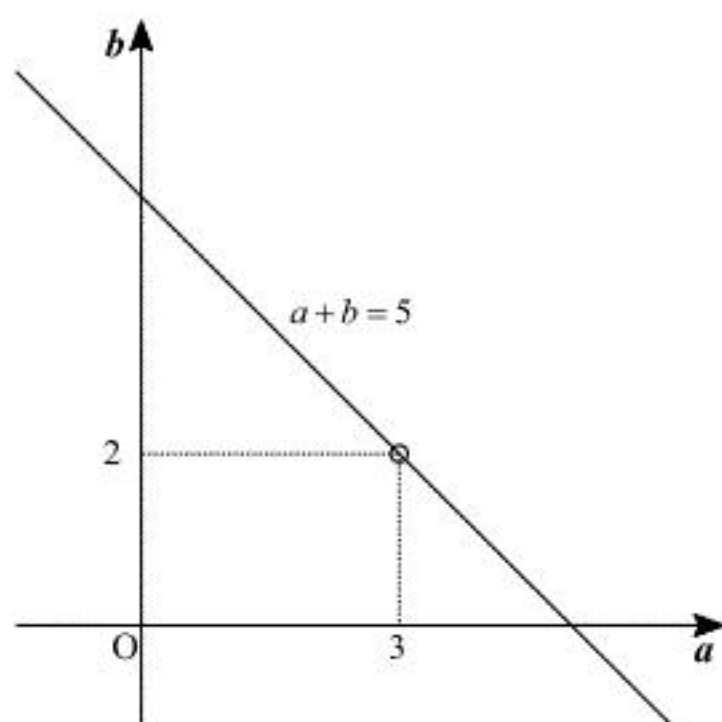
点Dは3点A, B, Cが通る平面 T 上に存在するので、実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OD} = (2, a, b)$, $\overrightarrow{OA} = (3, 1, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -2)$ であるから、

$$\begin{cases} 2 = 3 - s \\ a = 1 + 2s + 2t \\ b = 3 - s - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ a = 3 + 2t \\ b = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = \frac{a-3}{2} \\ a+b=5 \end{cases}$$

となる。よって、 $a+b=5$ である。ただし、点Bと点Dは異なる点であるから $(a, b) \neq (3, 2)$ である。以上から求める条件は下図のようになる。ただし、点 $(3, 2)$ は除く。



(答) 前図

(2)

$$\begin{cases} AB^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 \\ AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \\ BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \end{cases}$$

であるから、 $\triangle ABC$ は線分ACを斜辺とする直角三角形となる。よって、円 U は線分ACを直径とする。つまり、円 U は線分ACの中点 $(3, 2, 2)$ を中心として、その半径は

$$\frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

となる。点Dが円 U 上にあるとき、

$$(2-3)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2 = 2$$

である。これに、 $b=5-a$ を代入して、

$$\begin{aligned} (2-3)^2 + (a-2)^2 + (3-a)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 10a + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(a-2)(a-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2, 3 \end{aligned}$$

となる。 $(a, b) \neq (3, 2)$ であるから、 $(a, b) = (2, 3)$ となる。よって、点Dの座標は $(2, 2, 3)$ である。

(答) $(2, 2, 3)$

(1)

$y = x^2$ と $y = x + n(n+1)$ の交点の x 座標を求める。

$$x^2 = x + n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - n(n+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+n)(x-n-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -n, n+1$$

となる。よって、 $1 \leq x \leq n+1$ の範囲について考えれば良い。 x が $1 \leq x \leq n+1$ の範囲で自然数 k をとるとき、条件を満たす点の個数は

$$k + n(n+1) - k^2 + 1$$

である。よって、 $1 \leq x \leq n+1$ の範囲で x が変化するとき、条件を満たす点の個数 M は

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^{n+1} \{k + n(n+1) - k^2 + 1\} \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + n(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) + n+1 \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(2n^2 + n + 3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}(n+1)(2n^2 + n + 3)$$

(2)

(1)と同様にして、 N を求める。 $-n \leq x \leq -1$ の範囲について考えれば良い。 x が $-n \leq x \leq -1$ の範囲で整数 l をとるとき、条件を満たす点の個数は

$$l + n(n+1) - l^2 + 1$$

である。よって、 $-n \leq x \leq -1$ の範囲で x が変化するとき、条件を満たす点の個数 N は

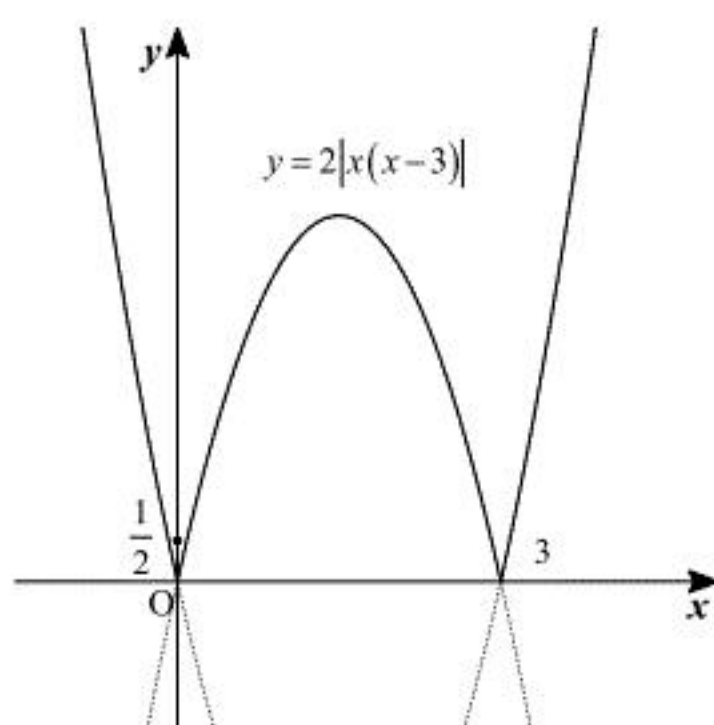
$$\begin{aligned} N &= \sum_{l=-n}^{-1} \{l + n(n+1) - l^2 + 1\} \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) + n^2(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n \\ &= \frac{1}{3}n(2n^2 + 1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} M - N &= \frac{1}{3}(n+1)(2n^2 + n + 3) - \frac{1}{3}n(2n^2 + 1) \\ &= n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

となる。 $n=31$ のとき、 $n^2 + n + 1 = 993$ となり、 $n=32$ のとき、 $n^2 + n + 1 = 1057$ となることから、 $M - N \geq 1000$ となる最小の n は $n=32$ である。

(1)



$y = g(x)$ は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、傾きが m の直線である。よって、上図で $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ と $y = f(x)$ の関係を考えると、 $f(x) = g(x)$ が異なる3解を持つのは、 $y = g(x)$ が $(3, 0)$ を通るときか、 $0 < x < 3$ で $y = f(x)$ と接するときである。

[1] $y = g(x)$ が $(3, 0)$ を通るとき

このとき、 $y = mx + \frac{1}{2}$ に $(x, y) = (3, 0)$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= 3m + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $y = g(x)$ が $0 < x < 3$ で $y = f(x)$ と接するとき

このとき、 $y = -2x(x-3)$ と $y = mx + \frac{1}{2}$ を連立して、

$$\begin{aligned} -2x(x-3) &= mx + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (m-6)x + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

となり、この式が $0 < x < 3$ において重解を持てば良い。この式の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} D &= (m-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= m^2 - 12 + 32 \\ &= (m-8)(m-4) \end{aligned}$$

となるが、 $D = 0$ となるので、 $m = 4, 8$ である。 $m = 4$ のとき、

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となり、重解は $x = \frac{1}{2}$ である。 $m = 8$ のとき、

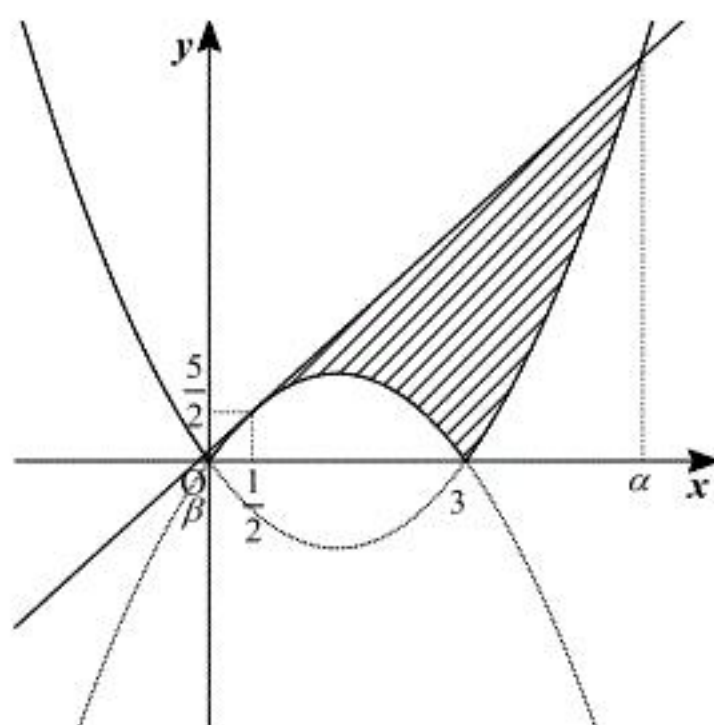
$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となり、重解は $x = -\frac{1}{2}$ である。よって、 $0 < x < 3$ において重解を持つのは $m = 4$ のときである。

以上[1], [2]から $f(x) = g(x)$ が異なる3解を持つのは、 $m = -\frac{1}{6}, 4$ の時である。

(答) $m = -\frac{1}{6}, 4$

(2)



求める面積は上図の斜線部となる。 $y = 4x + \frac{1}{2}$ と $y = 2x(x-3)$ の交点の x 座標を大きい順に

α, β とすると、 α, β は

$$\begin{aligned} 2x(x-3) &= 4x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

の2解となる。よって、解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{5^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

となる。以上を用いて、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} \left\{ 4x + \frac{1}{2} - 2x(x-3) \right\} dx - 2 \int_0^3 \{-2x(x-3)\} dx &= -\int_{\beta}^{\alpha} 2(x-\alpha)(x-\beta) dx - 2 \cdot \frac{2}{6} (3-0)^3 \\ &= \frac{2}{6} (\alpha - \beta)^3 - 18 \\ &= \frac{26\sqrt{26}}{3} - 18 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{26\sqrt{26}}{3} - 18$