

1

(1)

$f(x) = (x-a)e^{\frac{x^2}{2}}$ であるから,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-a)' e^{\frac{x^2}{2}} + (x-a) \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)' \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} + (x-a) x e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= (x^2 - ax + 1) e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = (x^2 - ax + 1) e^{\frac{x^2}{2}}$$

(2)

$f(x)$ が極値をもたない条件は, $f'(x) = (x^2 - ax + 1) e^{\frac{x^2}{2}}$ であるから, $f'(x) \geq 0$, すなわち $x^2 - ax + 1 \geq 0$ となることである。 $x^2 - ax + 1 = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= a^2 - 4 \\ &= (a-2)(a+2) \end{aligned}$$

であり, $D \leq 0$ となればよい。よって,

$$\begin{aligned} D &= (a-2)(a+2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq a \leq 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -2 \leq a \leq 2$$

(3)

点 $(t, f(t))$ における接線は, 傾き $f'(t)$ であり, 点 $(t, f(t))$ を通る直線であるから,

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (t^2 - at + 1) e^{\frac{t^2}{2}} (x-t) + (t-a) e^{\frac{t^2}{2}} \\ &= (t^2 - at + 1) e^{\frac{t^2}{2}} x + (-t^3 + at^2 - a) e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (t^2 - at + 1) e^{\frac{t^2}{2}} x + (-t^3 + at^2 - a) e^{\frac{t^2}{2}}$$

(4)

点 $(t, f(t))$ における接線が原点を通る時, 接線の方程式に $(x, y) = (0, 0)$ を代入して,

$$0 = (-t^3 + at^2 - a) e^{\frac{t^2}{2}}$$

となる。 $e^{\frac{t^2}{2}} > 0$ であるから, $t^3 - at^2 + a = 0$ となり, これが異なる3解を持てばよい。

$g(t) = t^3 - at^2 + a$ とすると, $g(t) = 0$ が相異なる3解をもつ条件は, $g(t)$ が2つの極値をもち, それらの符号が逆になることである。ここで,

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 2at \\ &= 3t \left(t - \frac{2}{3}a \right) \end{aligned}$$

となるから, $\frac{2}{3}a \neq 0$ であれば $g(t)$ は $t = 0, \frac{2}{3}a$ で極値を持つ。したがって a が満たす条件は,

$\frac{2}{3}a \neq 0$ において

$$\begin{aligned} g(0)g\left(\frac{2}{3}a\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow a \left\{ \left(\frac{2}{3}a\right)^3 - a\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a \right\} &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2(4a^2 - 27) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 \left(a + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \left(a - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) &> 0 \\ \Leftrightarrow a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} < a \end{aligned}$$

である。これは, $\frac{2}{3}a \neq 0$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} < a$$

2

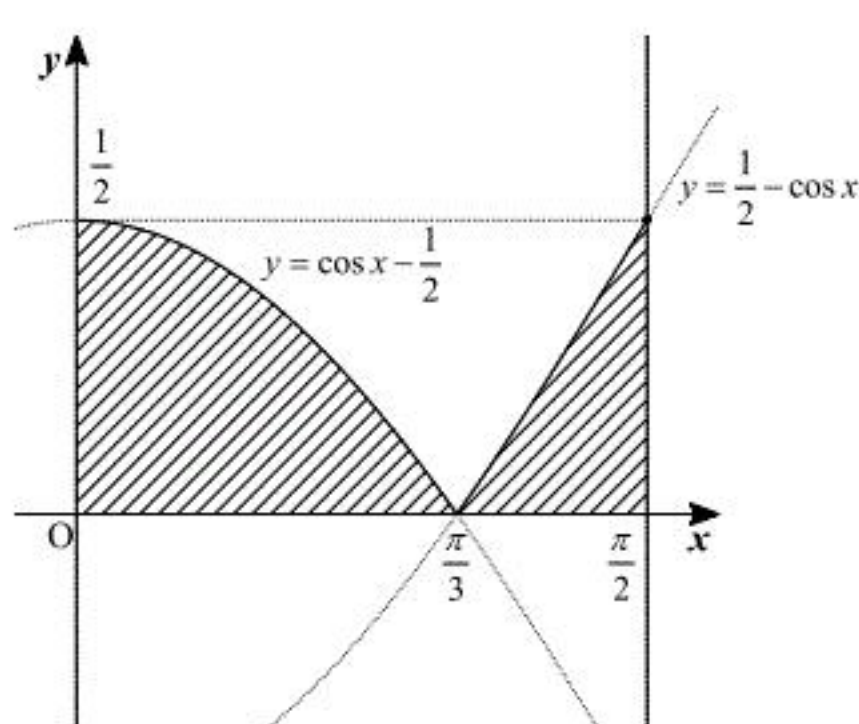
(1)

$t = \frac{1}{2}$ であるとき、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $f(x) = 0$ となるのは、

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

である。よって D は以下の斜線部のようになる。



(答) 前図

(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $0 \leq \cos x \leq 1$ かつ $y = \cos x$ は単調に減少するから、 $0 \leq t \leq 1$ のとき、

C は必ず x 軸と共有点を 1 つだけ持つ。よって、

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - t & (0 \leq x \leq \alpha) \\ t - \cos x & (\alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

となる。また、 $f(\alpha) = 0$ であるから、 $t = \cos \alpha$ と表せる。以上から、求める S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha (\cos x - \cos \alpha) dx + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha - \cos x) dx \\ &= [\sin x - x \cos \alpha]_0^\alpha + [x \cos \alpha - \sin x]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \sin \alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) S = 2 \sin \alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha - 1$$

(3)

t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、 $t = \cos \alpha$ より、 α は $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動く。

$g(\alpha) = 2 \sin \alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha - 1$ とすると、

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= 2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha + \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha \\ &= \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin \alpha \geq 0$ であり、 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ で $g'(\alpha) = 0$ となることから、 $g(\alpha)$ の

増減表は以下のようになる。

α	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\alpha)$		-	0	+	
$g(\alpha)$	$g(0)$	$\searrow$	$g\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

よって、最小値をとるのは $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のときであり、そのとき S, t の値は、

$$\begin{aligned} S &= g\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} - \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{4} - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1 \\ t &= \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) S = \sqrt{2} - 1, t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4)

回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - t|^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 2t \cos x + t^2) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - 2t \cos x + t^2 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} - 2t \sin x + t^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{2} t^2 - 2t + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left(t - \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

となる。 $t = \frac{2}{\pi}$ は $0 \leq t \leq 1$ を満たすので、 $t = \frac{2}{\pi}$ で最小値 $V = \frac{\pi^2}{4} - 2$ をとる。

$$(答) V = \frac{\pi^2}{4} - 2, t = \frac{2}{\pi}$$

3

(1)

$\beta^2 - t\beta + s = 0$ であるから、 $4s - t^2 > 0$ であることを利用して、

$$\begin{aligned}\beta^2 - t\beta + s &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\beta - \frac{t}{2}\right)^2 &= \frac{t^2}{4} - s \\ \Leftrightarrow \beta - \frac{t}{2} &= \pm \frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}i \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}i\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \pi$ であるから、 β の虚部は正の値である。よって、 β の実部は $\frac{t}{2}$ 、虚部は $\frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}$ となる。

$$(答) \text{ 実部: } \frac{t}{2}, \text{ 虚部: } \frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}$$

(2)

$4s - t^2 > 0$ より

$$s > \frac{t^2}{4} \geq 0$$

である。 $\beta = \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}i$ であるから、

$$\begin{aligned}|\beta| &= \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{4s - t^2}{4}} \\ &= \sqrt{s}\end{aligned}$$

となる。 $\sin \theta$ の値は $|\beta|$ と β の虚部の値を利用して、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}}{|\beta|} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}}{\sqrt{s}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{t^2}{4s}}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) |\beta| = \sqrt{s}, \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{t^2}{4s}}$$

(3)

三角形 OAB が二等辺三角形となるには $OA = OB$, $OA = AB$, $OB = AB$ のいずれかになれば良い。以下それぞれの場合について考える。

[1] $OA = OB$ となるとき

$OA = 1, OB = \sqrt{s}$ であるから、 $s = 1$ で $OA = OB$ となる。このとき、 $4s - t^2 > 0$ については、

$$\begin{aligned}4 - t^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)(t + 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -2 < t < 2\end{aligned}$$

で条件を満たす。

[2] $OA = AB$ となるとき

$$\begin{aligned}AB &= |\beta - 1| \\ &= \sqrt{\left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4s - t^2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 - 4t + 4}{4} + \frac{4s - t^2}{4}} \\ &= \sqrt{s - t + 1}\end{aligned}$$

であり、 $OA = 1$ であるから、 $s = t$ で $OA = AB$ となる。このとき、 $4s - t^2 > 0$ については、

$$\begin{aligned}4s - s^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow s(s - 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < s < 4\end{aligned}$$

で条件を満たす。

[3] $OB = AB$ となるとき

$AB = \sqrt{s - t + 1}, OB = \sqrt{s}$ であるから、 $t = 1$ で $OB = AB$ となる。このとき、 $4s - t^2 > 0$ については、

$$\begin{aligned}4s - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow s &> \frac{1}{4}\end{aligned}$$

で条件を満たす。

以上[1][2][3]から、三角形 OAB が二等辺三角形となるのは $s = 1$ かつ $-2 < t < 2$ 、 $t = s$ かつ

$0 < s < 4$ 、 $t = 1$ かつ $s > \frac{1}{4}$ となるときである。

$$(答) s = 1 \text{ かつ } -2 < t < 2, t = s \text{ かつ } 0 < s < 4, t = 1 \text{ かつ } s > \frac{1}{4}$$

(4)

$OA = AB$ であるから、 $t = s$ かつ $0 < s < 4$ となる。三角形 OAB は底辺が OA、高さが β の虚部と考えられるので、その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{4s - t^2}}{2} = \frac{\sqrt{4s - t^2}}{4} = \frac{\sqrt{4s - s^2}}{4}$$

である。これが $\frac{1}{4}$ となるとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{\sqrt{4s - s^2}}{4} \\ \Leftrightarrow 1 &= 4s - s^2 \\ \Leftrightarrow s^2 - 4s + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= 2 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。これは $0 < s < 4$ を満たす。以上から、求める (s, t) の組み合わせは

$(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ である。

$$(答) (s, t) = (2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$