

(1)

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とすると, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である。接点の x 座標を t とすると, 接線の傾きが 1 であるから $f'(t) = 1$ となる。

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow (e^t)^2 - 2e^t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^t &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるが, $e^t > 0$ であるから $e^t = 1 + \sqrt{2}$ である。よって, $t = \log(1 + \sqrt{2})$ となる。また $f(t)$ の値は

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって, 接点の座標は $(\log(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2})$ である。

(答) $(\log(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2})$

(2)

$g(x) = \frac{e^x - x}{x} = \frac{e^x}{x} - 1$ とすると,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < 1$ において, $g'(x) < 0$ となり, $g(x)$ は単調減少する。 $0 < \alpha < \beta < 1$ のとき,

$g(\alpha) > g(\beta)$ となるので, $\frac{e^\alpha - \alpha}{\alpha} > \frac{e^\beta - \beta}{\beta}$ となる。

(答) $\frac{e^\alpha - \alpha}{\alpha} > \frac{e^\beta - \beta}{\beta}$

(3)

$t = x + 1$ とすると, $dx = dt$ であり, x が $0 \rightarrow e - 1$ のとき, t が $1 \rightarrow e$ となる。よって,

$$\int_0^{e-1} x \log(x+1) dx = \int_1^e (t-1) \log t dt$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \int_1^e (t-1) \log t dt &= \left[\frac{1}{2} (t-1)^2 \log t \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} (t-1)^2 \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{2} \int_1^e \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 - 2t + \log t \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{e^2 - 3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^2 - 3}{4}$

(1)

真数条件と底の条件から、 $x > 0, y > 0, x \neq 1$ である。

[1] $\log x < 0$ つまり $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\log_x y &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x 1 \\ \Leftrightarrow 0 < y < 1 \quad (\because 0 < x < 1)\end{aligned}$$

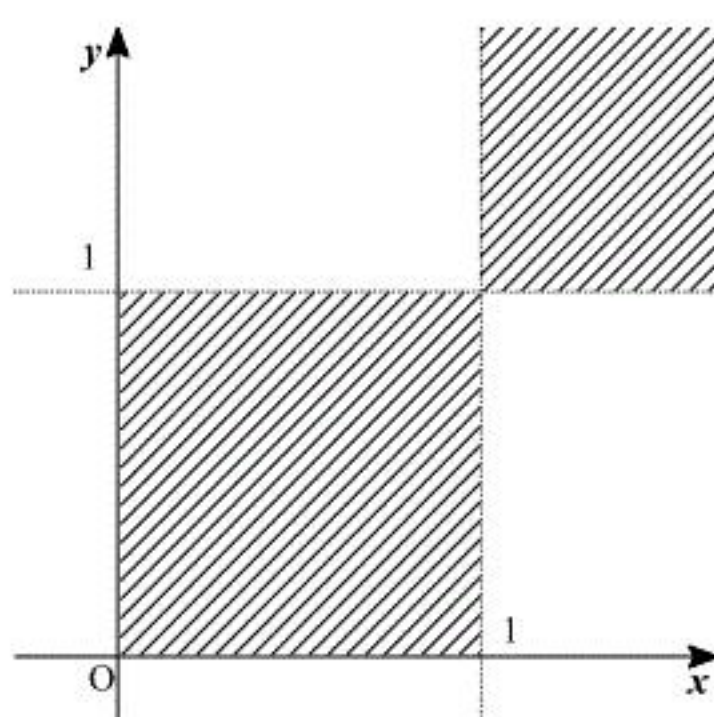
となる。

[2] $\log x > 0$ つまり $1 < x$ のとき

$$\begin{aligned}\log_x y &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x 1 \\ \Leftrightarrow y &> 1 \quad (\because 1 < x)\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める領域は以下になる。ただし、境界は含まない。



(答) 前図

(2)

真数条件と底の条件から、 $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$ である。

$$\begin{aligned}\log_y x &< \log_x y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\log_x y} &< \log_x y\end{aligned}$$

となるから、次の4つの場合に分けて考える。

[1] $0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ のとき

$\log_x y > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x y} &< \log_x y \\ \Leftrightarrow 1 &< (\log_x y)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_x y + 1)(\log_x y - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y - 1 &> 0 \quad (\because \log_x y + 1 > 0) \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x x \\ \Leftrightarrow y &< x \quad (\because 0 < x < 1)\end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < x < 1$ かつ $1 < y$ のとき

$\log_x y < 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x y} &< \log_x y \\ \Leftrightarrow 1 &> (\log_x y)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_x y + 1)(\log_x y - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y + 1 &< 0 \quad (\because \log_x y - 1 < 0) \\ \Leftrightarrow \log_x y &> -\log_x x \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &< x^{-1} \quad (\because 0 < x < 1) \\ \Leftrightarrow y &< \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となる。

[3] $1 < x$ かつ $0 < y < 1$ のとき

$\log_x y < 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x y} &< \log_x y \\ \Leftrightarrow 1 &> (\log_x y)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_x y + 1)(\log_x y - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y + 1 &< 0 \quad (\because \log_x y - 1 < 0) \\ \Leftrightarrow \log_x y &> -\log_x x \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &> x^{-1} \quad (\because 1 < x) \\ \Leftrightarrow y &> \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となる。

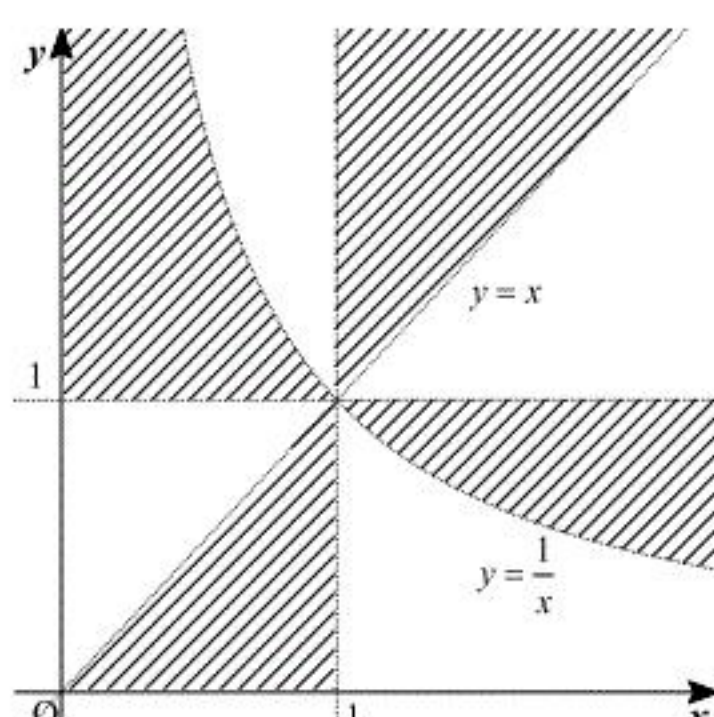
[4] $1 < x$ かつ $1 < y$ のとき

$\log_x y > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x y} &< \log_x y \\ \Leftrightarrow 1 &< (\log_x y)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_x y + 1)(\log_x y - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_x y - 1 &> 0 \quad (\because \log_x y + 1 > 0) \\ \Leftrightarrow \log_x y &> \log_x x \\ \Leftrightarrow y &> x \quad (\because 1 < x)\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より、求める領域は以下になる。ただし、境界は含まない。



(答) 前図

(1)

$$f(x) = x^3 - ax^2 + \frac{1}{3}(a^2 - 4)x \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2ax + \frac{1}{3}(a^2 - 4) \\ &= \frac{1}{3}(3x - a + 2)(3x - a - 2) \end{aligned}$$

となり, $f'(x) = 0$ は $x = \frac{a-2}{3}, \frac{a+2}{3}$ の異なる 2 解を定数 a の値にかかわらずもつ。よって,

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{a-2}{3}$	...	$\frac{a+2}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{a-2}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{a+2}{3}\right)$	$\nearrow$

したがって $y = f(x)$ は定数 a の値にかかわらず必ず極値をもつ。

(証明終)

(2)

$f(x) = 0$ が $-1 < x < 2$ において異なる 3 個の実数解を持つためには, (1) をふまえると極値をもつ x 座標について,

$$-1 < \frac{a-2}{3} < \frac{a+2}{3} < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < a < 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

であることが必要である。このもとで, $f(x) = 0$ が $-1 < x < 2$ において異なる 3 個の実数解を持つ条件は,

$$f(-1) < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f\left(\frac{a-2}{3}\right) > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right) < 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$f(2) > 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。②については,

$$\begin{aligned} f(-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 - a - \frac{1}{3}(a^2 - 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 3a - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(a - \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(a - \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} < a & \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

と計算される。また, ③については,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a-2}{3}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a-2}{3} \left\{ \left(\frac{a-2}{3}\right)^2 - a \cdot \frac{a-2}{3} + \frac{1}{3}(a^2 - 4) \right\} &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a^2 - 4a + 4 - 3a^2 + 6a + 3a^2 - 12) &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a^2 + 2a - 8) &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+4)(a-2)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow a \neq 2 & \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。また, ④については,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+2}{3}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+2}{3} \left\{ \left(\frac{a+2}{3}\right)^2 - a \cdot \frac{a+2}{3} + \frac{1}{3}(a^2 - 4) \right\} &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a^2 + 4a + 4 - 3a^2 - 6a + 3a^2 - 12) &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a^2 - 2a - 8) &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)^2(a-4) &< 0 \end{aligned}$$

となり, ①より常に条件を満たす。また, ⑤については,

$$\begin{aligned} f(2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 4a + \frac{2}{3}(a^2 - 4) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a-4) &> 0 \\ \Leftrightarrow a < 2 & \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。②, ③, ④, ⑤より, 求める a の範囲は $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} < a < 2$ となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} < a < 2$$

(1)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。よって、 $r=1$ 、 $\theta=\frac{\pi}{12}$ となる。

$$(\text{答}) \quad r=1, \quad \theta=\frac{\pi}{12}$$

(2)

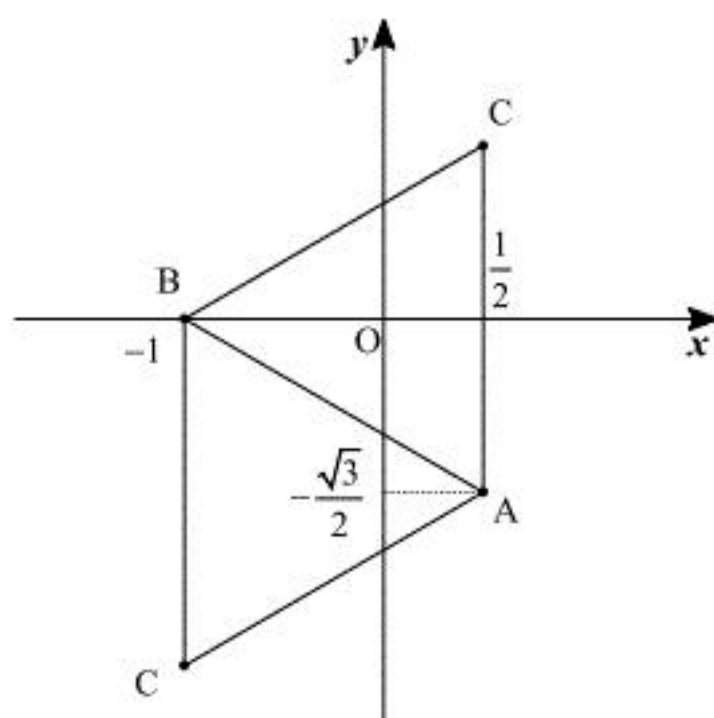
$\alpha = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ であることから、ド・モアブルの定理より、

$$\alpha^{20} = \cos \frac{20}{12}\pi + i \sin \frac{20}{12}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(3)



$\alpha = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ であることから、ド・モアブルの定理より、

$$\alpha^{36} = \cos \frac{36}{12}\pi + i \sin \frac{36}{12}\pi = -1$$

である。三角形 ABC は正三角形であるから、点 C は点 B を中心として点 A を $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転したもの

のである。よって、求める値は

$$\begin{aligned} \beta &= -1 + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \right) \\ &= -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \beta &= -1 + \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \right) \\ &= -1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1 - \sqrt{3}i$$