

1

(1)

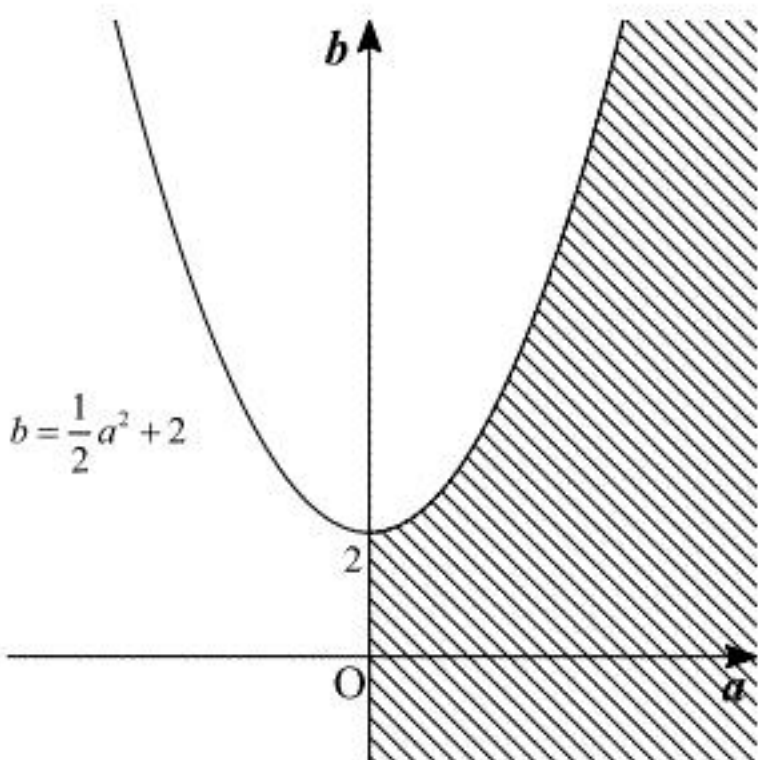
放物線 C_1, C_2 が異なる 2 つの共有点を持つとき、

$$\begin{aligned} 2-x^2 &= x^2+2ax+b \\ \Leftrightarrow 2x^2+2ax+b-2 &= 0 \end{aligned}$$

を満たす 2 つの異なる実数 x が存在する。このとき、 $2x^2+2ax+b-2=0$ の判別式を D とすると、 $D>0$ であることが必要十分条件である。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2-2(b-2) &> 0 \\ \Leftrightarrow b &< \frac{1}{2}a^2+2 \end{aligned}$$

であることから、 $b<\frac{1}{2}a^2+2$ かつ $a>0$ が必要十分条件となる。ゆえに、 ab 平面上において条件を満たす領域は下図の斜線部となる。ただし、境界線は除く。



(答) 条件： $b<\frac{1}{2}a^2+2$ かつ $a>0$ 、領域：前図の斜線部(境界線を含まない)

(2)

x_p, x_q は $2x^2+2ax+b-2=0$ の解である。したがって解と係数の関係より、

$$x_p+x_q=-a, x_px_q=\frac{b-2}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、 $f(x)=2-x^2, g(x)=x^2+2ax+b$ とすると $f'(x)=-2x, g'(x)=2x+2a$ である。したがって点 P における放物線 C_1 の接線の傾きは $f'(x_p)=-2x_p$ であり、点 Q における放物線 C_2 の接線の傾きは $g'(x_q)=2x_q+2a$ である。このとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} g'(x_q) &= 2x_q+2a \\ &= 2x_q-2(x_p+x_q) \\ &= -2x_p \\ &= f'(x_p) \end{aligned}$$

と導けることから、点 P における C_1 の接線と点 Q における C_2 の接線は平行であることが示された。

(証明終)

(3)

放物線 C_1 は上に凸であり、放物線 C_2 は下に凸であることから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{x_p}^{x_q} \left\{ (2-x^2) - (x^2+2ax+b) \right\} dx &= -2 \int_{x_p}^{x_q} (x-x_p)(x-x_q) dx \\ &= 2 \cdot \frac{(x_q-x_p)^3}{6} \\ &= \frac{(x_q-x_p)^3}{3} \end{aligned}$$

となる。いま、 $x_q-x_p>0$ より、 $(x_q-x_p)^2$ も最大値をとるとき、面積も最大値をとる。ここで、

$b=a^3-3a^2-6a+3$ および $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} (x_q-x_p)^2 &= (x_p+x_q)^2-4x_px_q \\ &= (-a)^2-4 \cdot \frac{b-2}{2} \\ &= a^2-2b+4 \\ &= a^2+4-2(a^3-3a^2-6a+3) \\ &= -2a^3+7a^2+12a-2 \end{aligned}$$

である。 $h(a)=-2a^3+7a^2+12a-2$ ($a>0$) とすると

$$\begin{aligned} h'(a) &= -6a^2+14a+12 \\ &= -2(a-3)(3a+2) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $h'(a)=0$ となるのは、 $a>0$ の範囲で $a=3$ のときであり、増減表は下のようになる。

a	0	...	3	...
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$			極大	

したがって増減表より、 $h(a)$ は $a=3$ のとき最大値 $h(3)=43$ をとる。このとき、

$$b=3^3-3 \cdot 3^2-6 \cdot 3+3=-15$$

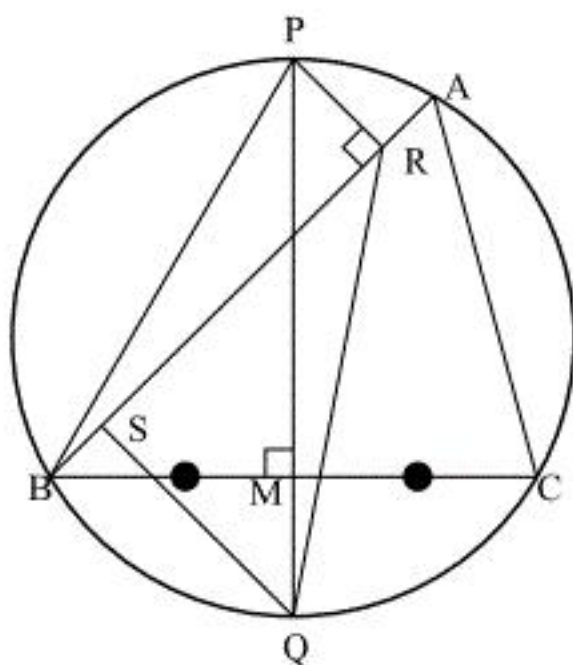
であり、これは(1)で求めた必要十分の条件式 $b<\frac{1}{2}a^2+2$ を満たす。よって、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積の最大値は

$$\frac{1}{3}(x_q-x_p)^{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 43^{\frac{3}{2}} = \frac{43}{3} \sqrt{43}$$

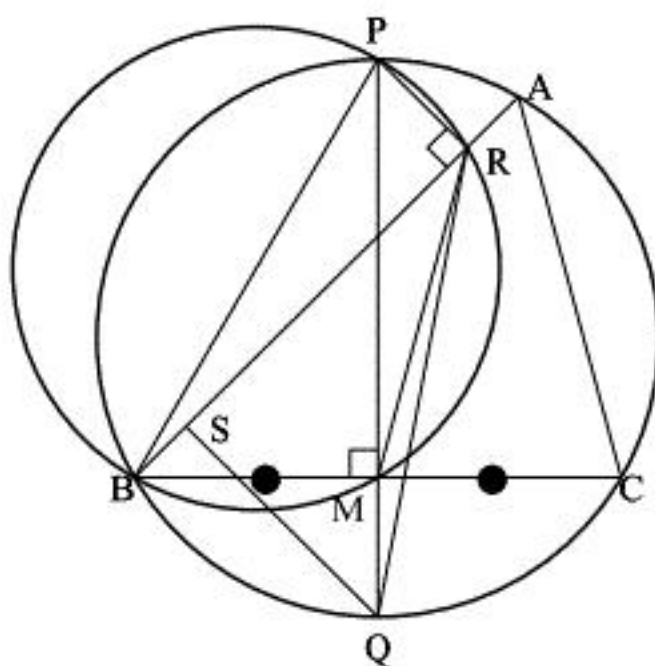
である。

(答) $\frac{43}{3} \sqrt{43}$

(1)



4点 P, B, M, R について、 $\angle PMB = \angle PRB = \frac{\pi}{2}$ であり、2点 R, M は線分 PB に対して同じ側にあることから、円周角の定理の逆より、4点 P, B, M, R は下図のように、線分 PB を直径とする円周上にある。



したがって弧 PR に対して円周角の定理を適用すると、 $\angle PBR = \angle PMR$ である。

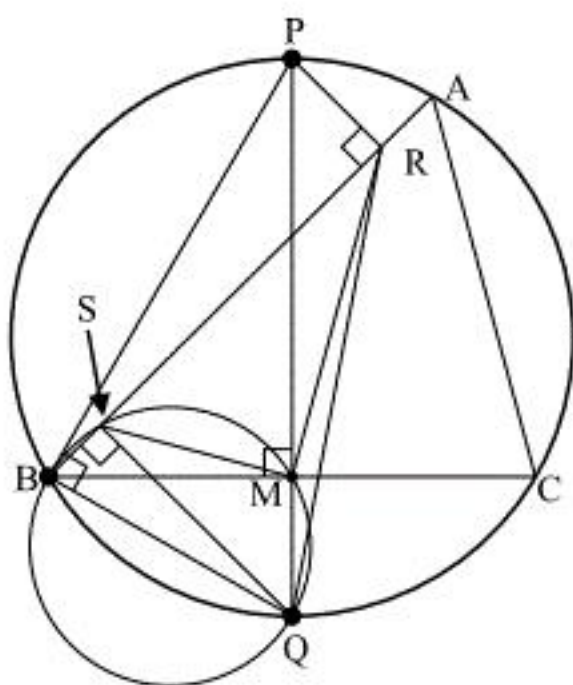
(証明終)

(2)

直線 PQ は辺 BC の垂直二等分線であるから、 $\triangle ABC$ の外接円の中心は直線 PQ 上にある。ゆえに線分 PQ は $\triangle ABC$ の外接円の直径だから、

$$\angle PBQ = \frac{\pi}{2}$$

である。4点 B, Q, M, S について、 $\angle BSQ = \angle BMQ = \frac{\pi}{2}$ であり、2点 S, M は線分 BQ に対して同じ側にあることから、円周角の定理の逆より、4点 B, Q, M, S は下図のような線分 BQ を直径とする円周上にある。



したがって、四角形 $BQMS$ は円に内接するため、 $\angle QMS$ の外角と $\angle SBQ$ は等しい。すなわち、 $\angle PMS = \angle RBQ$ となる。また(1)より $\angle PBR = \angle PMR$ であるので、

$$\begin{aligned} \angle RMS &= \angle RMP + \angle PMS \\ &= \angle PBR + \angle RBQ \\ &= \angle PBQ \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。よって三角形 SMR は直角三角形である。

(証明終)

(1)

$x = \sin \theta + 2 \cos \theta$ であることから,

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin \theta + 2 \cos \theta)^2 \\ &= 3 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 3 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + 1 \\ &= 3 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 2 \sin 2\theta + 1 \\ &= \frac{3}{2} \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} y &= 3 \cos 2\theta + 4 \sin 2\theta + 6 \sin \theta + 12 \cos \theta \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta + \frac{5}{2} \right) + 6(\sin \theta + 2 \cos \theta) - 5 \\ &= 2x^2 + 6x - 5 \end{aligned}$$

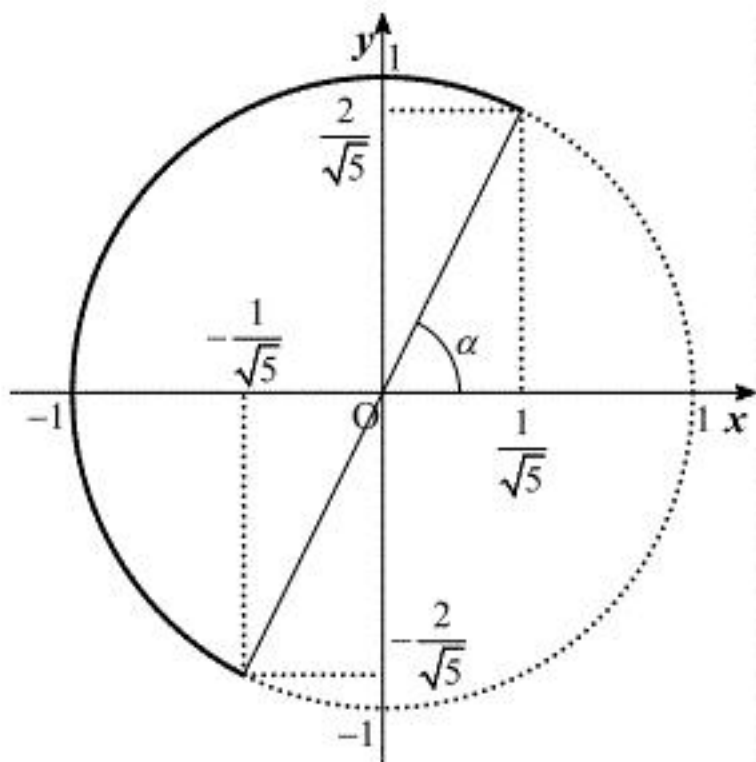
である。

(答) $y = 2x^2 + 6x - 5$

(2)

三角関数の合成公式を用いると, x は, $x = \sin \theta + 2 \cos \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$ と変形できる。ただし,

α は $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす角である。



ここで, $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\alpha \leq \theta + \alpha \leq \pi + \alpha$ である。ゆえに, 上の図より

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \sqrt{5}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 6x - 5 \\ &= 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{19}{2} \end{aligned}$$

であるため, y は $x = \sqrt{5}$ のとき最大値 $5 + 6\sqrt{5}$, $x = -\frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{19}{2}$ をとる。

(答) 最大値 $5 + 6\sqrt{5}$

最小値 $-\frac{19}{2}$

(1)

箱の中から4枚のカードを取り出す場合の数は ${}_{10}C_4 = 210$ (通り)であり、これらは同様に確からしく起こる。6と書かれたカードを含まずに、すべての封筒にカードが入るとき、取り出したカードは4と書かれたカードが2枚、9と書かれたカードが2枚である。このときの取り出し方の場合の数は ${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18$ (通り)である。したがって求める確率は

$$\frac{18}{210} = \frac{3}{35}$$

である。

(答) $\frac{3}{35}$

(2)

取り出したカードが全て封筒に入る確率を、6と書かれたカードを何枚取り出すかで場合分けして考える。

[1] 6と書かれたカードを取り出さないとき

(1)より、この確率は $\frac{3}{35}$ である。

[2] 6と書かれたカードを1枚取り出すとき

取り出したカードに書かれた数の組み合わせとして考えられるのは

$$(4, 4, 6, 9), (4, 6, 9, 9)$$

の2通りであり、それぞれの場合の数は

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_1 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ (通り)}$$

$${}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36 \text{ (通り)}$$

である。これらは互いに排反である。したがって、この場合の確率は、

$$\frac{24+36}{210} = \frac{2}{7}$$

である。

[3] 6と書かれたカードを2枚取り出したとき

取り出したカードに書かれた数の組み合わせとして考えられるのは

$$(4, 4, 6, 6), (4, 6, 6, 9), (6, 6, 9, 9)$$

の3通りであり、それぞれの場合の数は

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_2 = 3 \text{ (通り)}$$

$${}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_4C_1 = 12 \text{ (通り)}$$

$${}_2C_2 \cdot {}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。これらは互いに排反である。したがって、この場合の確率は

$$\frac{3+12+6}{210} = \frac{1}{10}$$

である。

以上[1], [2], [3]から、求める確率は

$$\frac{3}{35} + \frac{2}{7} + \frac{1}{10} = \frac{33}{70}$$

である。

(答) $\frac{33}{70}$

(3)

カードが入らない封筒が1つ以上ある事象を A 、取り出した4枚のカードの中に5と書かれたカードが含まれていない事象を B とする。(2)より、すべての封筒に取り出したカードが入らない確率 $P(A)$ は、余事象を考えて、

$$P(A) = 1 - \frac{33}{70} = \frac{37}{70}$$

である。また、すべての封筒にカードが入る場合の数は、

$$210 \cdot \frac{33}{70} = 99 \text{ (通り)}$$

であり、このとき取り出したカードに5と書かれたカードは含まれない。取り出したカードに5と書かれたカードが含まれない場合の数は

$${}_9C_4 = 126 \text{ (通り)}$$

である。したがって取り出したカードに5と書かれたものは含まれず、カードが入らない封筒が1つ以上できる場合の数は

$$126 - 99 = 27 \text{ (通り)}$$

であるので、確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = \frac{27}{210} = \frac{9}{70}$$

である。したがってカードが入らない封筒があったときに5と書かれたカードが含まれていない確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{70}}{\frac{37}{70}} = \frac{9}{37}$$

である。

(答) $\frac{9}{37}$