

1

(1)(i)

自然対数の底の定義を利用して,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} \right\}^2 = e^2$$

である。

(答) e^2

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - \sqrt{9^x - 3^x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3^x - \sqrt{9^x - 3^x})(3^x + \sqrt{9^x - 3^x})}{3^x + \sqrt{9^x - 3^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9^x - (9^x - 3^x)}{3^x + \sqrt{9^x - 3^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3^x}}} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$y = \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ のとき

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right)' \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 4} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}}{x^2 + 4} \\ &= \frac{4}{x(x^2 + 4)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{4}{x(x^2 + 4)}$

(3)(i)

$x+2=t$ とおくと, $x=t-2$ であり, 両辺を t で微分すると $\frac{dx}{dt}=1$ が得られる。また, x と t の関係は次の表の通りである。

x	-2	$\rightarrow$	0
t	0	$\rightarrow$	2

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x-4)(x+2)^5 dx &= \int_0^2 (t-6)t^5 dt \\ &= \int_0^2 (t^6 - 6t^5) dt \\ &= \left[\frac{1}{7}t^7 - t^6 \right]_0^2 \\ &= -\frac{320}{7} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{320}{7}$

(ii)

部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{x+1} dx &= \left[x e^{x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{x+1} dx \\ &= e^2 - \left[e^{x+1} \right]_0^1 \\ &= e \end{aligned}$$

である。

(答) e

(1)

関数 $y = \frac{2}{e^x + 1}$ において、 $e^x > 0$ より $e^x + 1 > 1$ であるから、 y の値域について

$$0 < \frac{2}{e^x + 1} < 2$$

$$\therefore 0 < y < 2$$

が得られる。また、

$$y = \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\Leftrightarrow e^x + 1 = \frac{2}{y} \quad (\because 0 < y < 2)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{y} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \log\left(\frac{2}{y} - 1\right)$$

である。したがって、関数 $y = \frac{2}{e^x + 1}$ の逆関数は

$$y = \log\left(\frac{2}{x} - 1\right) \quad (0 < x < 2)$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \log\left(\frac{2}{x} - 1\right) \quad (0 < x < 2)$$

(2)

$f(x) = \log_2 x + 2x^2 - 10x + 9$ とする。このとき、 $f(x)$ は $1 \leq x \leq 4$ において連続関数である。

また、

$$f(2) = \log_2 2 + 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 9 = -2 < 0$$

$$f(4) = \log_2 4 + 2 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 + 9 = 3 > 0$$

であることから、中間値の定理から $2 < x < 4$ において $f(x) = 0$ となる x が存在する。したがって $\log_2 x + 2x^2 - 10x + 9 = 0$ は $1 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

(証明終)

(3)

3点 α, β, γ が同一直線上にあるとき、 $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ は実数である。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} &= \frac{(3t + 4) + (t^2 + 6)i - (t + 2i)}{(t + 2) + 5i - (t + 2i)} \\ &= \frac{2t + 4 + (t^2 + 4)i}{2 + 3i} \\ &= \frac{\{2t + 4 + (t^2 + 4)i\} \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} \\ &= \frac{3t^2 + 4t + 20 + (2t^2 - 6t - 4)i}{13} \end{aligned}$$

である。ゆえに、 $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ が実数のとき

$$2t^2 - 6t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

(1)

$$\begin{aligned} xy - x - 11y + 11 &= x(y-1) - 11(y-1) \\ &= (x-11)(y-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $(x-11)(y-1)$

(2)

x, y はいずれも 0 でないから、

$$\begin{aligned} \frac{11}{x} + \frac{1}{y} &= 1 \\ \Leftrightarrow 11y + x &= xy \\ \Leftrightarrow xy - x - 11y + 11 &= 11 \\ \Leftrightarrow (x-11)(y-1) &= 11 \end{aligned}$$

・・・①

となる。 x, y が整数のとき、 $x-11, y-1$ も整数である。ゆえに、①を満たす $x-11, y-1$ の組み合わせは

$$(x-11, y-1) = (1, 11), (11, 1), (-1, -11), (-11, -1)$$

であり、このときの (x, y) はそれぞれ

$$(x, y) = (12, 12), (22, 2), (10, -10), (0, 0)$$

である。 x, y は 0 でない整数であるので、 $(x, y) = (12, 12), (22, 2), (10, -10)$ である。

(答) $(x, y) = (12, 12), (22, 2), (10, -10)$

(3)

$$\frac{11}{x} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3w} = 1 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{x} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3w} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{11}{x} + \frac{2z-3w}{6zw} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{x} + \frac{1}{6zw} = 1 \quad (\because 2z-3w=1) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、 z, w は 0 でない整数であるから、 $6zw$ も 0 でない整数である。よって(2)より②を満たす $x, 6zw$ の組み合わせは、

$$(x, 6zw) = (12, 12), (22, 2), (10, -10)$$

である。よって

$$(x, zw) = (12, 2), \left(22, \frac{1}{3}\right), \left(10, -\frac{5}{3}\right)$$

である。ここで、 z, w が整数のとき zw も整数であるため $(x, zw) = (12, 2)$ のみが条件を満たす。 $zw=2$ より、考えられる (z, w) の組み合わせは

$$(z, w) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$$

であり、このうち $2z-3w=1$ となる組み合わせは $(z, w) = (2, 1)$ のみである。以上より、

$(x, z, w) = (12, 2, 1)$ である。

(答) $(x, z, w) = (12, 2, 1)$

(1)

点Qは曲線C上にあるから、点Qの座標は実数 q を用いて (q, e^{2q}) と表せる。曲線Cについ

て、

$$y' = 2e^{2x}$$

であるから、点Qにおける曲線Cの接線の方程式は

$$y = 2e^{2q}(x - q) + e^{2q}$$

である。これが点P $(t, 0)$ を通るとき、

$$0 = 2e^{2q}(t - q) + e^{2q}$$

$$\Leftrightarrow 2t - 2q + 1 = 0 \quad (\because e^{2q} > 0)$$

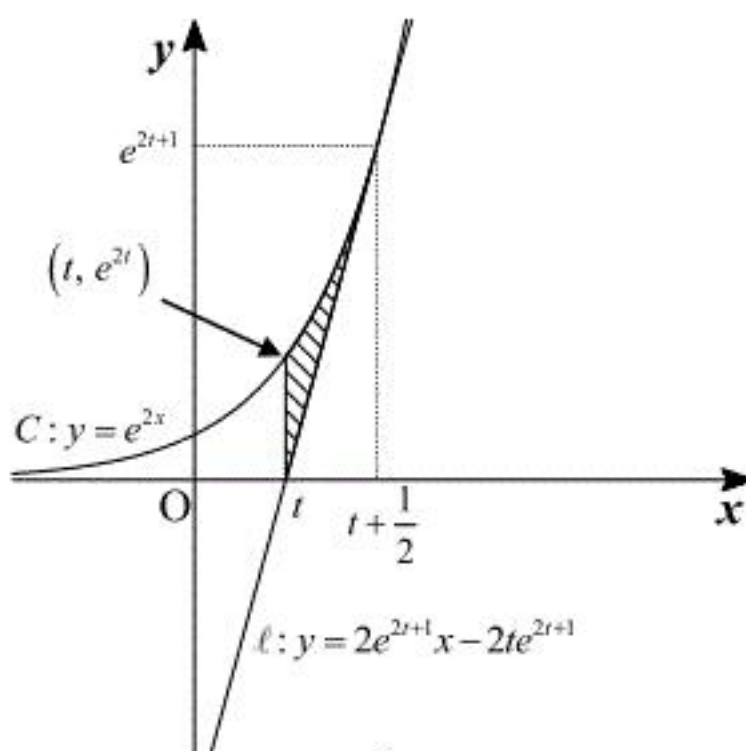
$$\Leftrightarrow q = t + \frac{1}{2}$$

である。したがって点Qの座標は $(t + \frac{1}{2}, e^{2t+1})$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(t + \frac{1}{2}, e^{2t+1}\right)$$

(2)

(1)より、曲線Cと接線 ℓ のグラフは下のようになる。



上図の斜線部分が x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_t^{t+\frac{1}{2}} (e^{2x})^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi (e^{2t+1})^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_t^{t+\frac{1}{2}} - \frac{e^{4t+2}}{6} \pi \\ &= \frac{e^{4t+2} - e^{4t}}{4} \pi - \frac{e^{4t+2}}{6} \pi \\ &= \frac{e^{4t}(e^2 - 3)\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V(t) = \frac{e^{4t}(e^2 - 3)\pi}{12}$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{e^{4t}(e^2 - 3)\pi}{12}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t + \log \frac{(e^2 - 3)\pi}{12}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 4 + \frac{1}{t} \log \frac{(e^2 - 3)\pi}{12} \right\} \\ &= 4 + 0 \cdot \frac{(e^2 - 3)\pi}{12} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(t)}{t} = 4$$