

平成 29 年度前期日程入学試験問題

数 学 B

理 学 部

注 意 事 項

- ① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、2 ページ(表紙, 白紙を除く)です。試験開始後、確認してください。
- ③ 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ④ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に各用紙ごとに記入しなさい。
- ⑤ 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示しなさい。

数 学 B

1 a を実数の定数とし、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で2つの曲線 $C_1: y = 1 + \cos 2x$ と $C_2: y = a \cos x$ を考える。 C_1 と C_2 は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において共有点をただひとつ持つとし、その共有点の x 座標を t とする。 $0 \leq x \leq t$ の範囲で C_1 , C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし、 $t \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 関数 $y = 1 + \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の増減、最大最小、および曲線 C_1 の凹凸、変曲点を調べ、 C_1 の概形をかけ。
- (2) a のとり得る値の範囲を求めよ。また、 a を t を用いて表し、 t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $S_1 + S_2$ を t を用いて表せ。
- (4) t が(2)で求めた範囲を動くとき、 $S_1 + S_2$ が最小になる t の値を求めよ。

2 α を複素数の定数とし、自然数 n に対して複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \alpha z_n + 1 - \alpha$$

で定める。以下の各問に答えよ。

- (1) z_2, z_3, z_4 をそれぞれ α を用いて表せ。
- (2) 一般の n について z_n を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

以下では、 $\alpha = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。ただし、 i は虚数単位を表し、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (3) $\frac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき、どんな自然数 n に対しても z_{n+1} は実数にならないことを示せ。
- (4) 自然数 n に対して、複素数平面上の2点 z_n と z_{n+1} との距離を ℓ_n とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$ の和 L を求めよ。さらに、 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき、 L の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

3 n を自然数とし、対数は自然対数とする。 $x > 0$ の範囲で、2つの曲線 $C: y = x \log x$ と $C_n: y = k_n x^{n+1}$ を考える。 C と C_n は共有点 P_n を持ち、かつ P_n における C と C_n の接線が一致するように定数 k_n を定める。 P_n の x 座標を a_n とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 関数 $y = x \log x$ ($x > 0$) の増減、極値、および曲線 C の凹凸、変曲点を調べ、 C の概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であることは証明せずに用いてよい。
- (2) k_n および a_n を n を用いて表せ。
- (3) 曲線 C と C_2 および、2直線 $x = a_1$, $x = a_2$ で囲まれた部分の面積 T を求めよ。
- (4) 点 P_n における曲線 C_n の接線と x 軸との交点の x 座標を b_n とし、 C_n , 2直線 $x = a_n$, $x = b_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることは証明せずに用いてよい。