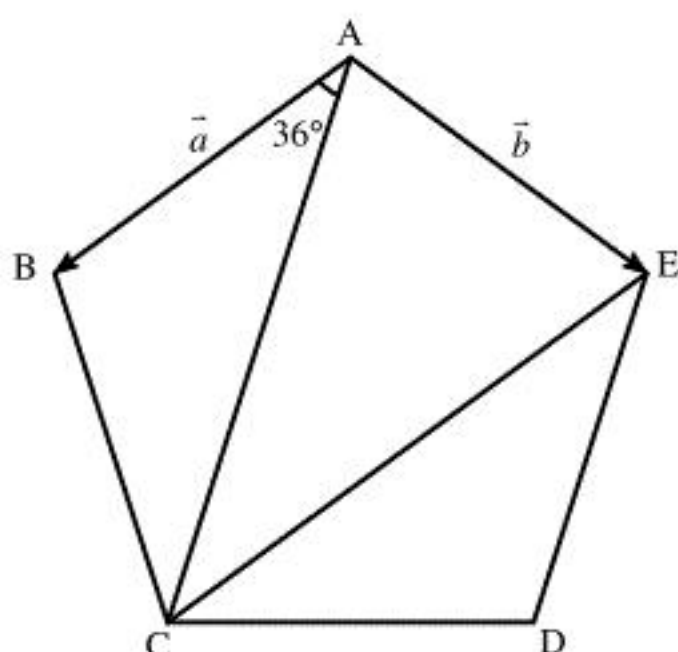


(1)

正五角形の1つの内角の大きさは 108° であり、 $\triangle ABC$ は $BA=BC$ の二等辺三角形であるから、

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \\ &= 36^\circ\end{aligned}$$

である。以下に、正五角形 $ABCDE$ を図示する。



$AC=x$ とおき、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ \Leftrightarrow l^2 &= l^2 + x^2 - 2x \cos 36^\circ \\ \Leftrightarrow x(x - 2 \cos 36^\circ) &= 0\end{aligned}$$

が得られ、 $x \neq 0$ であるから、

$$x = 2 \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(2)

正五角形の対称性より、 $\angle DCE = 36^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned}\angle ACE &= 108^\circ - \angle ACB - \angle ECD \\ &= 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ \\ &= 36^\circ\end{aligned}$$

である。これより、 $\angle BAC = \angle ACE$ であるから、錯角より AB と EC は平行である。また、正

五角形の対称性より $AC=EC=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから、 $\overrightarrow{EC}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{AB}$ である。したがって、

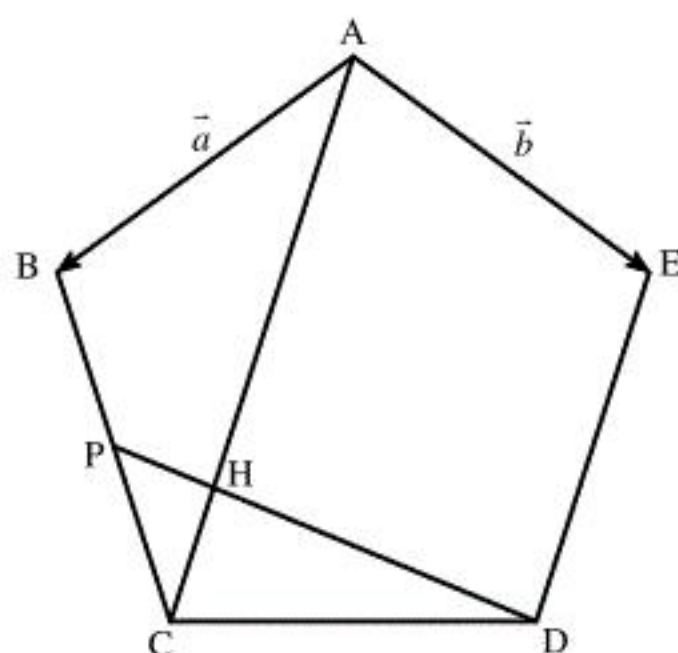
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

(3)

以下に、点 P および点 H を図示する。



点 H は線分 AC 上の点だから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}k\vec{a} + k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。また、点 H は線分 DP 上の点でもあるから、実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AD} + (1-s)\overrightarrow{AP} \quad \dots \textcircled{2}$$

とも書ける。さらに、正五角形の対称性より $\overrightarrow{BD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{AE}$ であるから、

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{b} \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、点 P は線分 BC の中点であるから、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。③と④を②に代入すると、

$$\overrightarrow{AH} = \left\{ s + \frac{\sqrt{5}+3}{4}(1-s) \right\} \vec{a} + \left\{ \frac{\sqrt{5}+1}{2}s + \frac{1}{2}(1-s) \right\} \vec{b} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく、平行でもないから、①と⑤のそれぞれの係数は等しい。よって2式を連立すると

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{\sqrt{5}+1}{2}k = s + \frac{\sqrt{5}+3}{4}(1-s) \\ k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}s + \frac{1}{2}(1-s) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5}+1}{2}k = \frac{\sqrt{5}+3}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}s \\ k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}s \end{cases} \\ \therefore s = \sqrt{5}-2, k = 3-\sqrt{5}\end{aligned}$$

と求まる。 $AH:AC=k:1$ であるから、

$$AH:AC = (3-\sqrt{5}):1$$

である。

$$(\text{答}) \quad AH:AC = (3-\sqrt{5}):1$$

(1)

与式に $a=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - \cos 2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2\theta - (1 - 2\sin^2\theta) + 2\sqrt{3}\sin\theta + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin\theta(2\sin\theta + \sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta = 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq \theta < 2\pi$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \sin\theta = 0 &\Leftrightarrow \theta = 0, \pi \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(2)

与えられた方程式を変形すると、

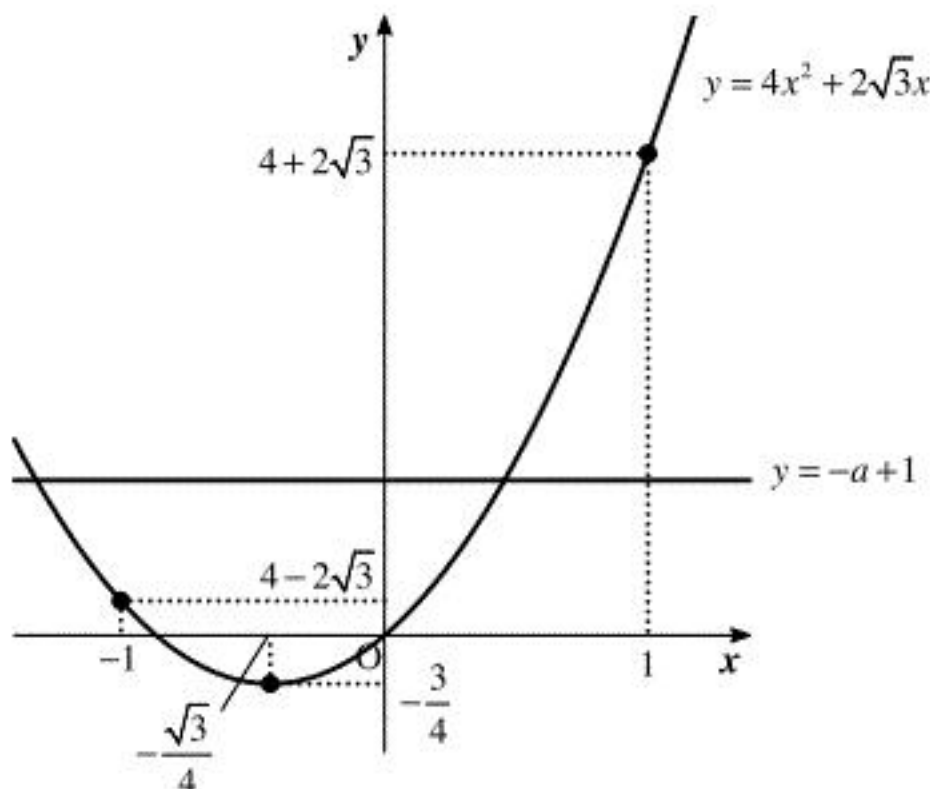
$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - (1 - 2\sin^2\theta) + 2\sqrt{3}\sin\theta + a &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta &= -a + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ であるから $\sin\theta = x$ とおくと、求めるべき a の範囲は、

$$4x^2 + 2\sqrt{3}x = -a + 1$$

が $-1 \leq x \leq 1$ で解を持つときの a のとり得る値の範囲である。すなわち、放物線

$y = 4x^2 + 2\sqrt{3}x$ と直線 $y = -a + 1$ が $-1 \leq x \leq 1$ で共有点を持つときの a のとり得る値の範囲を求めればよい。以下に、放物線 $y = 4x^2 + 2\sqrt{3}x$ と直線 $y = -a + 1$ を示す。



上図より、放物線 $y = 4x^2 + 2\sqrt{3}x$ と直線 $y = -a + 1$ が $-1 \leq x \leq 1$ で共有点を持つときの a のとりうる値の範囲は、

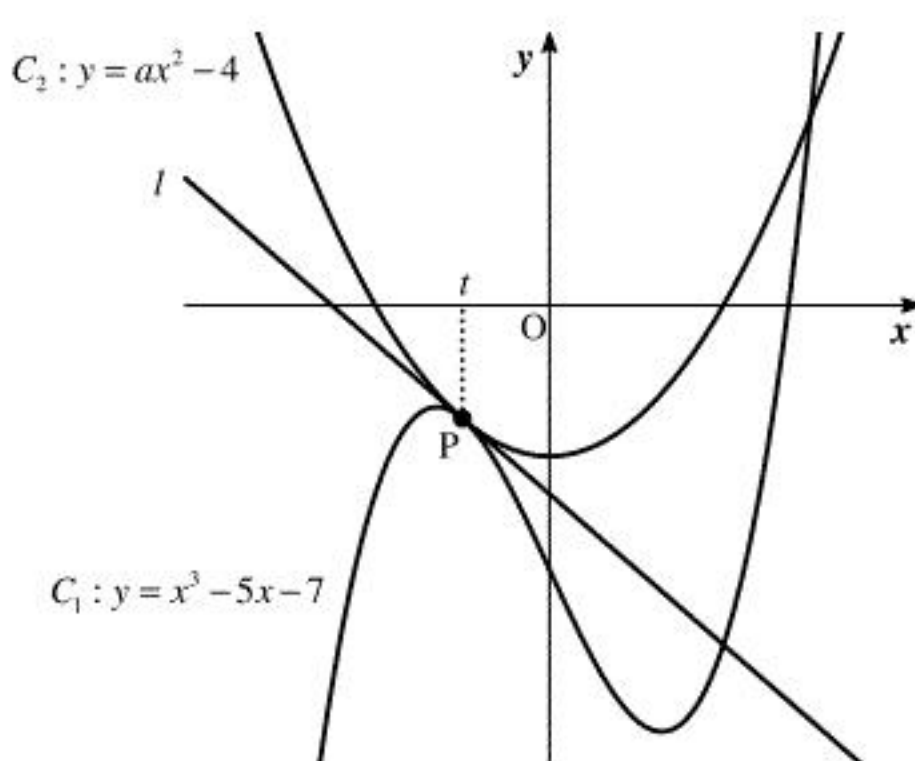
$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} &\leq -a + 1 \leq 4 + 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow -3 - 2\sqrt{3} &\leq a \leq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -3 - 2\sqrt{3} \leq a \leq \frac{7}{4}$$

(1)

曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点のうち、接線 l の接点を点 P とし、その x 座標を t とおく。曲線 C_1 と曲線 C_2 を図示すると下図の通りになる。



ここで、 $(x^3 - 5x - 7)' = 3x^2 - 5$ より、曲線 C_1 上の点 $P(t, t^3 - 5t - 7)$ における接線の方程式は、

$$y = (3t^2 - 5)(x - t) + t^3 - 5t - 7$$

$$\Leftrightarrow y = (3t^2 - 5)x - 2t^3 - 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であり、同様に $(ax^2 - 4)' = 2ax$ だから、曲線 C_2 上の点 $P(t, at^2 - 4)$ における接線の方程式は、

$$y = 2at(x - t) + at^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = 2atx - at^2 - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②はどちらも接線 l であり、傾きと y 切片が一致するから、

$$\begin{cases} 3t^2 - 5 = 2at \\ -2t^3 - 7 = -at^2 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 5 = 2at \\ 4t^3 + 6 = 2at^2 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 5 = 2at \\ 4t^3 + 6 = 2at^2 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。③と④から a を消去すると、

$$4t^3 + 6 = t(3t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 5t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t^2 - t + 6) = 0$$

が得られる。いま、

$$t^2 - t + 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$$

であるから、 $t^2 - t + 6 = 0$ は実数解を持たない。よって、 $t^3 + 5t + 6 = 0$ の実数解は $t = -1$ のみ

である。これを③に代入すると、 $3 \cdot (-1)^2 - 5 = 2a \cdot (-1) \Leftrightarrow a = 1$ を得る。 $a = 1$ のとき、曲線 C_2

は $y = x^2 - 4$ であり、曲線 C_1 と曲線 C_2 の方程式から y を消去すると、

$$x^3 - 5x - 7 = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 3$$

となり、共有点を 2 個持つから題意を満たしている。

(答) $a = 1$

(2)

曲線 C_1 と接線 l の共有点の x 座標は、

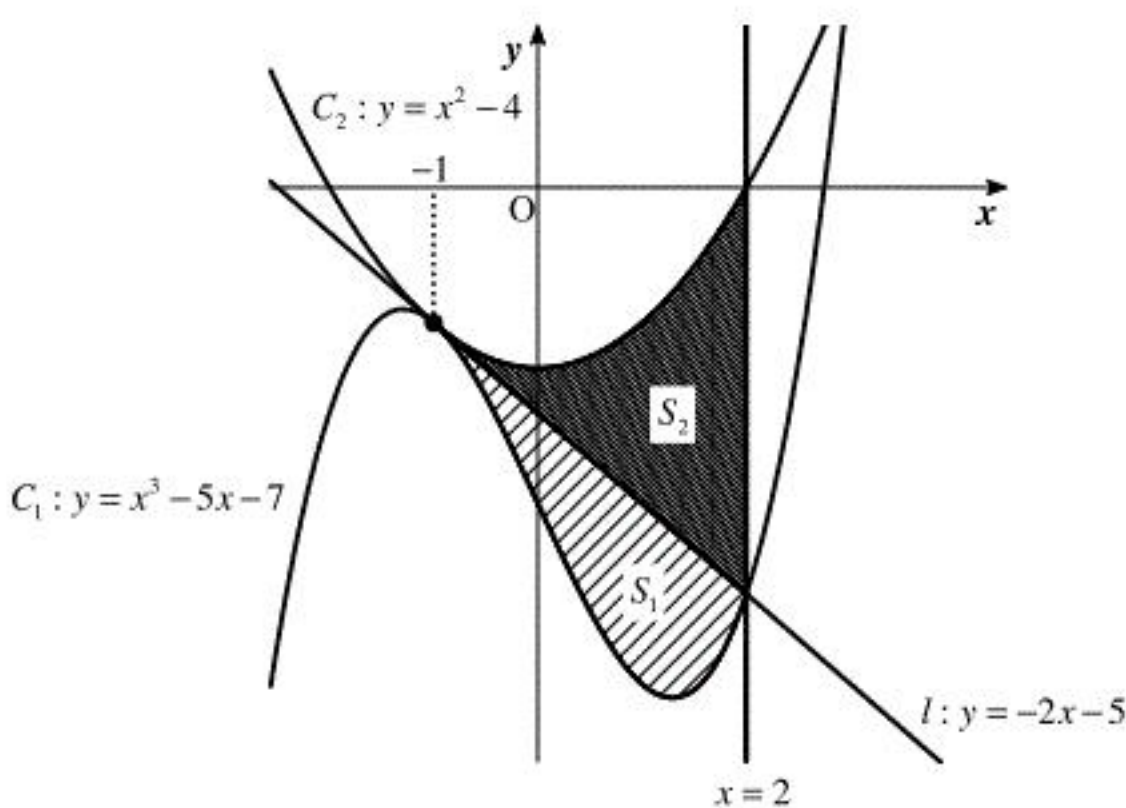
$$x^3 - 5x - 7 = -2x - 5$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 2$$

である。以下に、 S_1 を斜線部、 S_2 を打点部で図示する。



上図より、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^2 \{(-2x - 5) - (x^3 - 5x - 7)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left\{ -\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \right\} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。また、 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^2 \{(x^2 - 4) - (-2x - 5)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right) - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{27}{4}}{9} = \frac{3}{4}$$

となる。

(答) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}$

(1)

9個の玉を区別して考えると、9個の玉から3個を1個ずつ取り出す場合の数は ${}_9P_3$ 通りであり、これらはすべて同様に確からしく起こる。3個目を取り出して終了するのは、3回で赤玉、白玉、青玉を1回ずつ取り出すときである。赤白青の各色でどの玉を取り出すかの場合の数は $4 \cdot 3 \cdot 2$ 通りであり、3個の玉をどの順番で取り出すかの場合の数は $3!$ 通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3!}{{}_9P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3!}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}$

(2)

8個目を取り出して終了するとき、7個目を取り出した時点で残っている2個の玉はどちらも青玉でなければならない。すなわち、求める確率は7個目を取り出すまでに赤玉4個白玉3個を取り出し、8個目に青玉を取り出す確率である。(1)と同様に9個の玉を区別して考えると、まず、9個の玉から8個を1個ずつ取り出す場合の数は ${}_9P_8$ 通りであり、それらは同様に確からしく起こる。さらに、赤玉と白玉の計7個を取り出す場合の数は $7!$ 通りであり、最後にどちらの青玉を取り出すかの場合の数は2通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{7! \cdot 2}{{}_9P_8} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{36}$$

である。

(答) $\frac{1}{36}$

(3)

7個目を取り出して終了するとき、6個目を取り出した時点ではまだ赤白青のうち取り出されていない色が1つある。6個目を取り出した時点で青色が取り出されていないとき、残っている3個は「青玉2個と白玉1個」もしくは「青玉2個と赤玉1個」のいずれかである。6個目を取り出した時点で白玉が取り出されていないとき、残っている3個はすべて白玉である。一方、白玉と青玉が計5個しかないから、6個目を取り出した時点で赤玉が取り出されていないことはない。したがって、6個目を取り出した時点での3個の玉の残り方は[1]青玉2個白玉1個、[2]青玉2個赤玉1個、[3]白玉3個の3通りある。

[1] 残っているのが青玉2個白玉1個の場合

まず、9個の玉から7個を選んで取り出す場合の数は ${}_9P_7$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。赤玉4個白玉2個の計6個を取り出す場合の数は、白玉のうちどれを残すことにするかの3通りに、6個を取り出す順番の場合の数の $6!$ 通りをかけた $3 \cdot 6!$ 通りである。さらに、7個目を取り出したときに終了するためには、7回目に青玉を取り出す必要があるから、どの青玉を取り出すかで2通りある。したがって、求める確率は、

$$\frac{3 \cdot 6! \cdot 2}{{}_9P_7} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{42}$$

である。

[2] 残っているのが青玉2個赤玉1個の場合

赤玉3個白玉3個の計6個を取り出す場合の数は、[1]と同様に考えると、赤玉のうちどれを残すことにするかの4通りに、6個を取り出す順番の場合の数の $6!$ 通りをかけた $4 \cdot 6!$ 通りである。また、7個目を取り出したときに終了するためには、7回目に青玉を取り出す必要があるから、どの青玉を取り出すかで2通りある。したがって、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 6! \cdot 2}{{}_9P_7} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{63}$$

である。

[3] 残っているのが白玉3個の場合

赤玉4個青玉2個の計6個を取り出す場合の数は、6個を取り出す順番を考慮した $6!$ 通りである。また、最後にどの白玉を取り出すかの場合の数は3通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{6! \cdot 3}{{}_9P_7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{84}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、7個目を取り出して終了する確率は、[1], [2], [3]がそれぞれ排反な事象であるから、

$$\frac{1}{42} + \frac{2}{63} + \frac{1}{84}$$

である。また、7個目を取り出して終了する事象の中で、袋の中に白玉が残っていない事象は[2]の場合であるから、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{2}{63}}{\frac{1}{42} + \frac{2}{63} + \frac{1}{84}} = \frac{8}{17}$$

となる。

(答) $\frac{8}{17}$