

(1)

関数 $f(x) = \int_1^x \log t dt + \int_1^3 f(t) dt$ について、 $\int_1^3 f(t) dt = a$ とおくと、 $f(x) = \int_1^x \log t dt + a$ となる。

これより、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x (t)' \log t dt + a \\ &= [t \log t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt + a \\ &= x \log x - [t]_1^x + a \\ &= x \log x - x + 1 + a \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(t) dt &= a \\ \Leftrightarrow \int_1^3 (t \log t - t + 1 + a) dt &= a \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_1^3 t \log t dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 \log t \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{9}{2} \log 3 - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^3 \\ &= \frac{9}{2} \log 3 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 (-t + 1 + a) dt &= \left[-\frac{1}{2} t^2 + (1+a)t \right]_1^3 \\ &= -2 + 2a \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} \int_1^3 (t \log t - t + 1 + a) dt &= a \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} \log 3 - 2 - 2 + 2a &= a \\ \therefore a &= 4 - \frac{9}{2} \log 3 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= x \log x - x + 1 + a \\ &= x \log x - x + 5 - \frac{9}{2} \log 3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = 4 - \frac{9}{2} \log 3, \quad f(x) = x \log x - x + 5 - \frac{9}{2} \log 3$$

(2)

関数 $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \log x \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

である。これより、曲線 C の増減凹凸表は以下のようになる。

x	1	...
$f'(x)$	0	+
$f''(x)$	+	+
$f(x)$	$4 - \frac{9}{2} \log 3$	↗

(答) 前表

(3)

(2)より、 $f'(x) = \log x$ であるから、接線 ℓ の方程式は

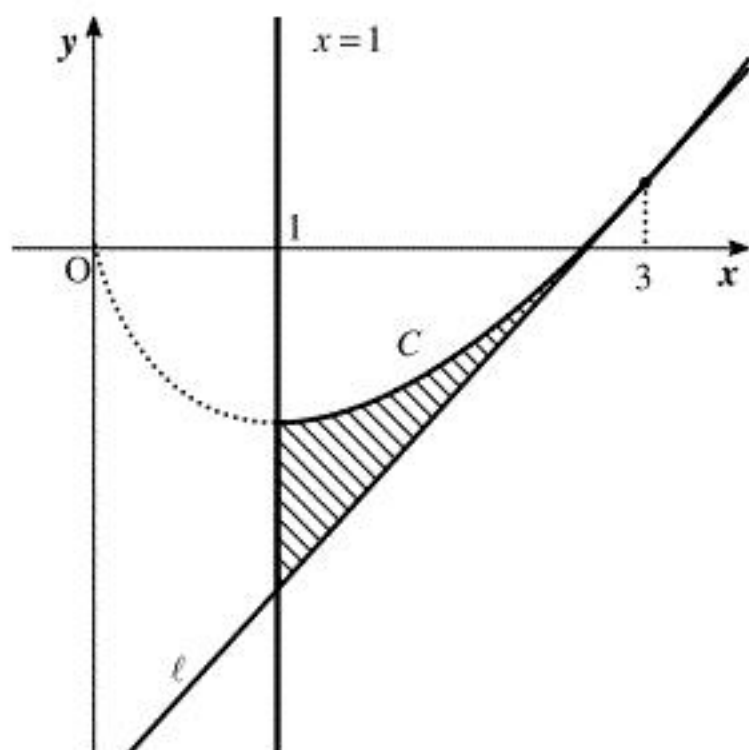
$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ \Leftrightarrow y &= (\log 3)(x-3) + 3 \log 3 - 3 + 5 - \frac{9}{2} \log 3 \\ \Leftrightarrow y &= (\log 3)x + 2 - \frac{9}{2} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (\log 3)x + 2 - \frac{9}{2} \log 3$$

(4)

曲線 C と接線 ℓ および直線 $x=1$ で囲まれた部分を図示すると下図の斜線部のようになる。



上図より、斜線部の面積 S は

$$S = \int_1^3 \left\{ f(x) - \left((\log 3)x + 2 - \frac{9}{2} \log 3 \right) \right\} dx$$

となる。ここで、(1)より

$$\int_1^3 f(x) dx = a = 4 - \frac{9}{2} \log 3$$

であり、また

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left\{ (\log 3)x + 2 - \frac{9}{2} \log 3 \right\} dx &= \left[\frac{(\log 3)}{2} x^2 + \left(2 - \frac{9}{2} \log 3 \right) x \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} \log 3 + 6 - \frac{27}{2} \log 3 \right) - \left(\frac{1}{2} \log 3 + 2 - \frac{9}{2} \log 3 \right) \\ &= -5 \log 3 + 4 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= 4 - \frac{9}{2} \log 3 - (-5 \log 3 + 4) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} \log 3$$

(1)

点 D, E, F, G の座標をそれぞれ $D(d_x, d_y, d_z)$, $E(e_x, e_y, e_z)$, $F(f_x, f_y, f_z)$, $G(g_x, g_y, g_z)$ とする。

点 D, E, F, G はそれぞれ点 $M(a, b, c)$ に関して、点 $A(0, 2b, 2c)$, $B(2a, 0, 2c)$, $C(2a, 2b, 0)$, $O(0, 0, 0)$ と対称な点である。つまり、線分 AD, BE, CF, OG の中点が M である。よって、

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \frac{\overline{OA} + \overline{OD}}{2} = \frac{\overline{OB} + \overline{OE}}{2} = \frac{\overline{OC} + \overline{OF}}{2} = \frac{\overline{OO} + \overline{OG}}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_x \\ 2b + d_y \\ 2c + d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + e_x \\ e_y \\ 2c + e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + f_x \\ 2b + f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立ち、これより、

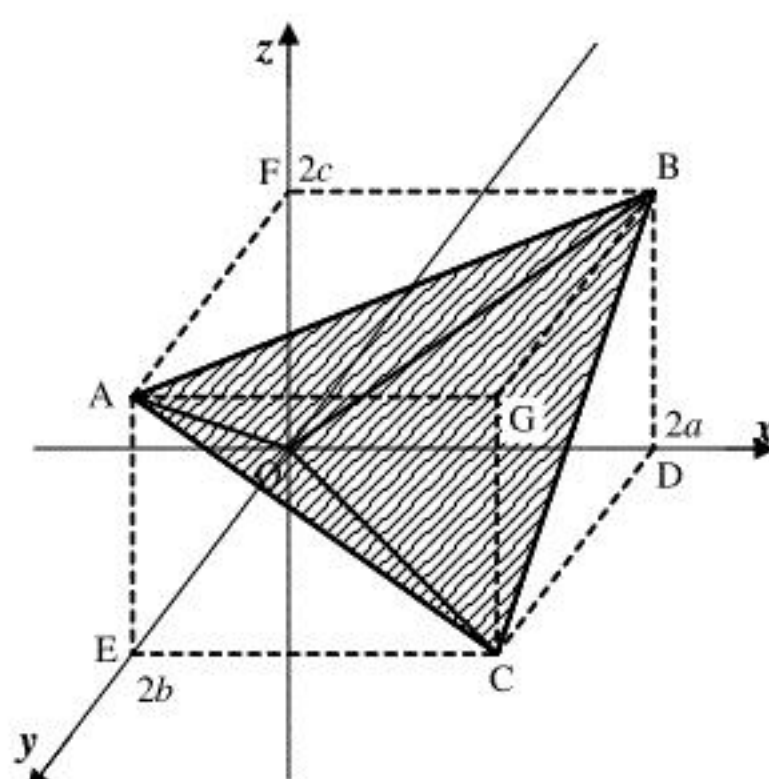
$$\begin{aligned}(d_x, d_y, d_z) &= (2a, 0, 0) \\ (e_x, e_y, e_z) &= (0, 2b, 0) \\ (f_x, f_y, f_z) &= (0, 0, 2c) \\ (g_x, g_y, g_z) &= (2a, 2b, 2c)\end{aligned}$$

となる。ゆえに、点 D, E, F, G の座標は $D(2a, 0, 0)$, $E(0, 2b, 0)$, $F(0, 0, 2c)$, $G(2a, 2b, 2c)$ である。

(答) $D(2a, 0, 0)$, $E(0, 2b, 0)$, $F(0, 0, 2c)$, $G(2a, 2b, 2c)$

(2)

四面体 OABC は直方体 ODCE-FBGA から三角錐 OEAC, OFBA, ODCB, GABC をくりぬいたものである。以下に、四面体 OABC を図示する。



直方体の体積を V_0 、4つの三角錐それぞれの体積を V_1, V_2, V_3, V_4 とすると

$$\begin{aligned}V_0 &= 2a \cdot 2b \cdot 2c = 8abc \\ V_1 = V_2 = V_3 = V_4 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c = \frac{4}{3}abc\end{aligned}$$

である。よって、四面体 OABC の体積 V は

$$V = V_0 - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = \frac{8}{3}abc$$

となる。また

$$\begin{aligned}MO &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ MA &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-2b)^2 + (c-2c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ MB &= \sqrt{(a-2a)^2 + (b-0)^2 + (c-2c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ MC &= \sqrt{(a-2a)^2 + (b-2b)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\end{aligned}$$

であるから、四面体 OABC の4つの頂点を通る球面の中心は点 M である。ゆえに、その半径

R は $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ を満たす。

(答) $V = \frac{8}{3}abc$, $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(3)

$c=2$ より、 $V = \frac{16}{3}ab$ である。よって、 V が整数となるのは「 a, b の少なくとも一方が3の倍数となる」ときである。この事象を X とすると、その余事象 $\overline{X}$ は「 a, b がともに3の倍数でない」事象である。これは、さいころを2回投げて、どちらの目も1, 2, 4, 5のいずれかの目である事象であるから、その確率を $P(\overline{X})$ とすると、

$$P(\overline{X}) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

となる。ゆえに

$$p_1 = P(X) = 1 - P(\overline{X}) = \frac{5}{9}$$

となる。また、 $c=2$ のとき $R = \sqrt{a^2 + b^2 + 4}$ である。 R が整数となるのは、 $a^2 + b^2 + 4$ が平方数となるときで、それは

$$(a, b) = (1, 2), (2, 1), (3, 6), (4, 4), (6, 3)$$

のときである。「 R が整数となる」事象を Y とすると求める確率は $P(Y)$ であり

$$p_2 = P(Y) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

となる。

(答) $p_1 = \frac{5}{9}$, $p_2 = \frac{5}{36}$

(4)

求める条件付き確率は $P_X(Y)$ であり

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

が成り立つ。ここで、 $X \cap Y$ は「 V も R も整数となる」事象である。これは

$$(a, b) = (3, 6), (6, 3)$$

のときである。つまり

$$P(X \cap Y) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

であるから

$$p_3 = P_X(Y) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{10}$$

となる。

(答) $p_3 = \frac{1}{10}$

(1)

$C_1: y = k \cos x$, $C_2: y = \sin x$ について, この2曲線の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} k \cos x &= \sin x \\ \Leftrightarrow \sin x - k \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+k^2} \sin(x-\phi) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。ただし, ϕ は $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $\sin \phi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ を満たす実数である。ここで,

$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において, $-\frac{\pi}{2} < x - \phi < 2\pi$ であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{1+k^2} \sin(x-\phi) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \phi, \phi + \pi \end{aligned}$$

となる。よって, $\alpha < \beta$ より, $\alpha = \phi$, $\beta = \phi + \pi$ となるから, 求める値は

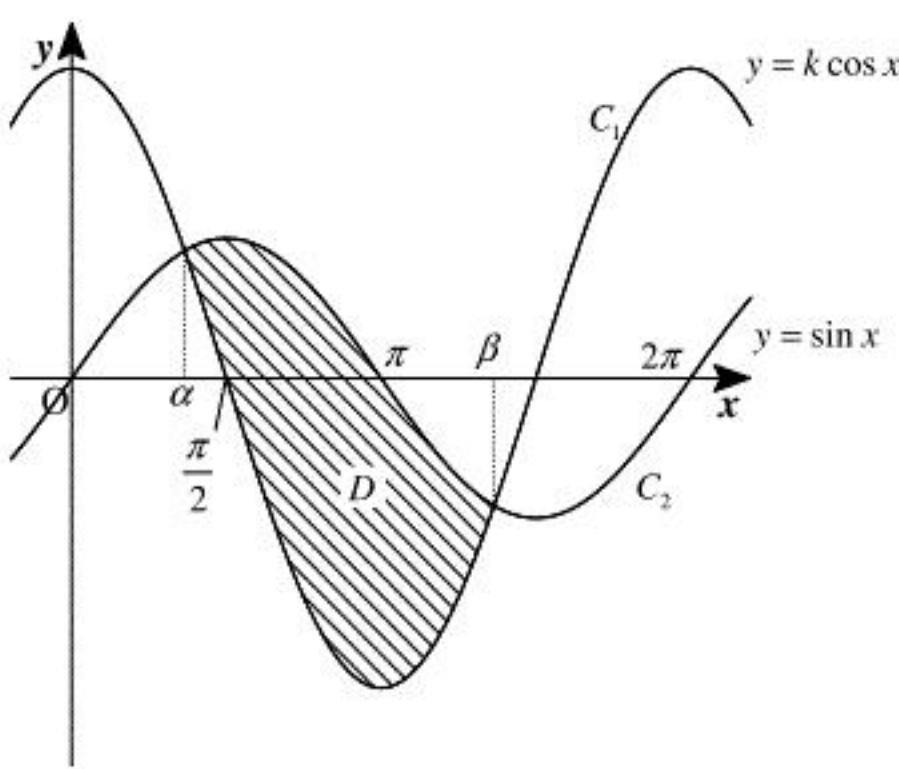
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \\ \sin \alpha &= \sin \phi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ \cos \beta &= \cos(\phi + \pi) = -\cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \\ \sin \beta &= \sin(\phi + \pi) = -\sin \phi = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \sin \beta = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

(2)

曲線 C_1 , C_2 および, D を図示すると下の図の斜線部のようになる。



上図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (\sin x - k \cos x) dx \\ &= \int_{\phi}^{\phi+\pi} \sqrt{1+k^2} \sin(x-\phi) dx \\ &= -\sqrt{1+k^2} [\cos(x-\phi)]_{\phi}^{\phi+\pi} \\ &= -\sqrt{1+k^2} (\cos \pi - \cos 0) \\ &= 2\sqrt{1+k^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 2\sqrt{1+k^2}$$

(3)

(2)の図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\pi} \sin x dx - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} k \cos x dx \\ &= -[\cos x]_{\alpha}^{\pi} - k [\sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -(\cos \pi - \cos \alpha) - k \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \right) \\ &= -\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) - k \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right) \\ &= 1 - k + \sqrt{1+k^2} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ \Leftrightarrow S_2 &= S - S_1 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\sqrt{1+k^2} - (1 - k + \sqrt{1+k^2}) \\ &= k - 1 + \sqrt{1+k^2} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} 3S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow 3(1 - k + \sqrt{1+k^2}) &= k - 1 + \sqrt{1+k^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+k^2} &= 2(k-1) \end{aligned}$$

となるが, この式の左辺は正であるから右辺も正, すなわち $k > 1$ を満たすことが必要である。このもとで両辺2乗すると,

$$\begin{aligned} 1+k^2 &= 4(k-1)^2 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 8k + 3 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{4+\sqrt{7}}{3} \quad (\because k > 1) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

(4)

(3)より, $S_1 = 1 - k + \sqrt{1+k^2}$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - k + \sqrt{1+k^2}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1-k)^2 - (\sqrt{1+k^2})^2}{(1-k) - \sqrt{1+k^2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2k}{(1-k) - \sqrt{1+k^2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2}{\left(\frac{1}{k} - 1\right) - \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} \\ &= \frac{-2}{-1 - \sqrt{1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_1 = 1$$