

(1)

合成関数の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}\{\log(2x+4)\}' &= \frac{(2x+4)'}{2x+4} \\ &= \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = \frac{1}{x+2}$$

(2)

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin x \cos 2x + \cos x (-2 \sin 2x) \\ &= -(\sin x \cos 2x + 2 \cos x \sin 2x)\end{aligned}$$

を得る。さらに微分すると、

$$\begin{aligned}f''(x) &= -(\cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x - 2 \sin x \sin 2x + 4 \cos x \cos 2x) \\ &= -5 \cos x \cos 2x + 4 \sin x \sin 2x\end{aligned}$$

を得る。 $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ であることに注意して、 $x = 0$ を代入すると、

$$f''(0) = -5$$

を得る。

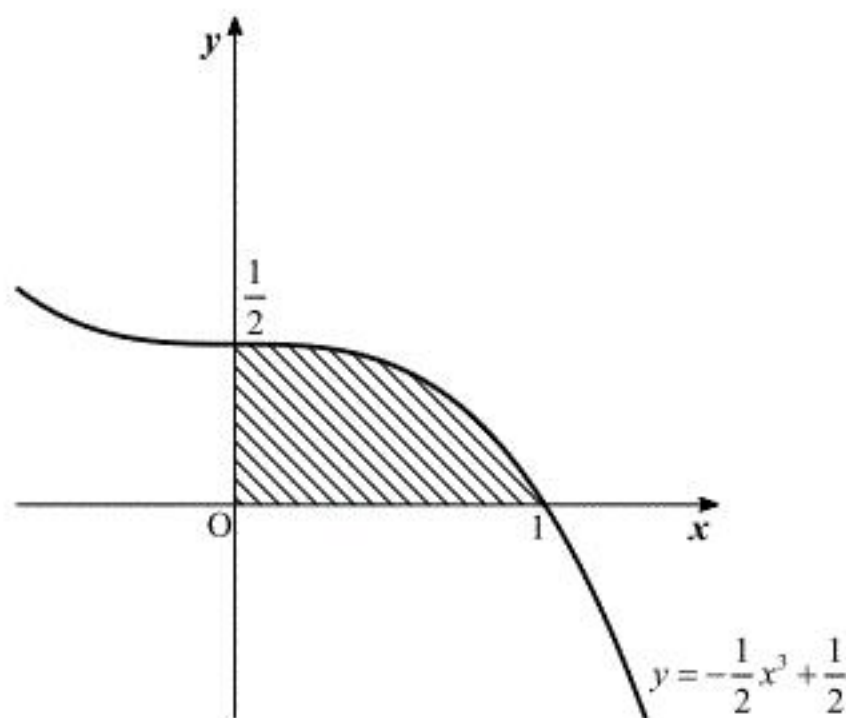
$$(\text{答}) \quad f''(0) = -5$$

(3)

曲線 $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$ は、曲線 $y = -\frac{1}{2}x^3$ を y 方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したものである。また、

$x = 0$ を代入すると $y = \frac{1}{2}$ である。このことから、 $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$, x 軸, y 軸で囲まれた図形は

下図の斜線部である。



斜線部を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、 $V = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi x^2 dy$ と書ける。また、

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}x^2$ であり、積分区間は下の表のようになる。

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$
x	1	$\rightarrow$	0

置換積分より、求める体積は、

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi x^2 dy \\ &= \int_1^0 \pi x^2 \left(-\frac{3}{2} x^2 dx \right) \\ &= \frac{3}{2} \pi \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{3}{2} \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{10} \pi\end{aligned}$$

となる。

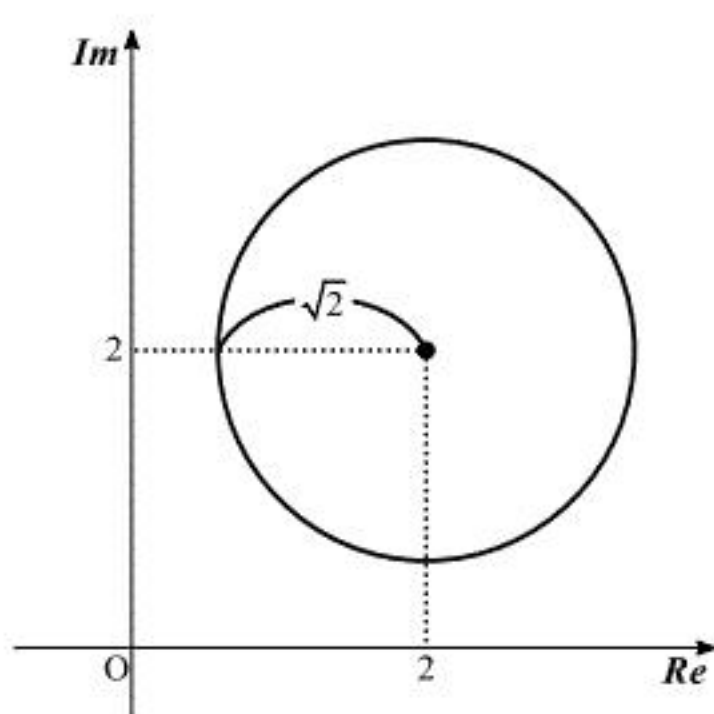
$$(\text{答}) \quad V = \frac{3}{10} \pi$$

(1)

$\left| \frac{z-2-2i}{1-i} \right| = 1$ を変形すると、

$$\begin{aligned} |z-(2+2i)| &= |1-i| \\ \Leftrightarrow |z-(2+2i)| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって、図形 C は中心が $2+2i$ 、半径が $\sqrt{2}$ の円である。これを以下に図示する。



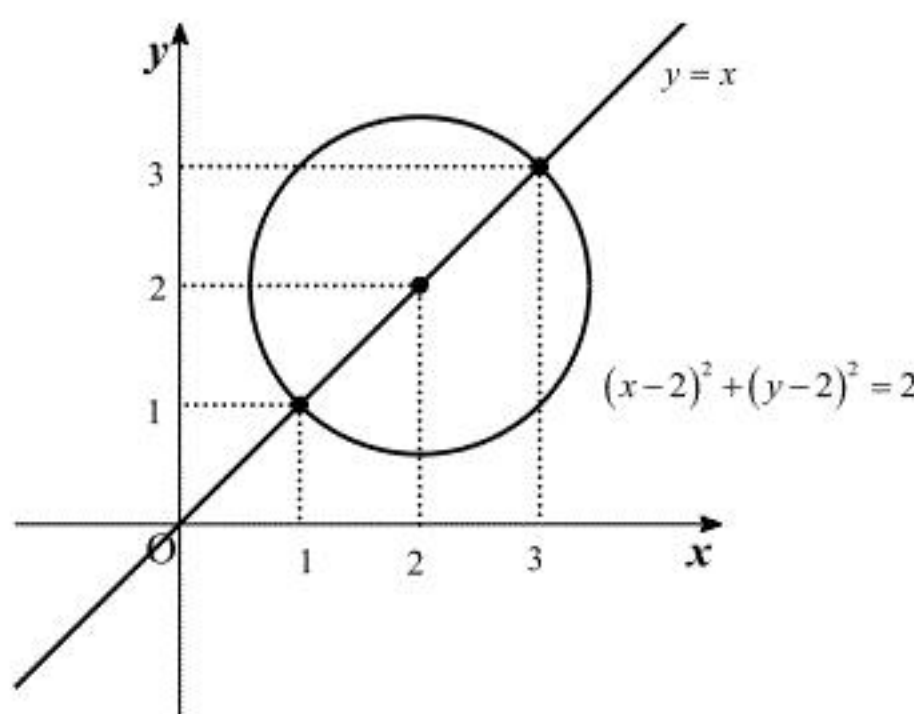
(答) 前図

(2)

xy 平面上で考えると、図形 C の方程式は $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ となる。ここで、図形 C 上の点 z を P とおく。 $|z|$ が最大となるとき、 P と原点を結ぶ直線は図形 C の中心を通る。図形 C の中心 $(2, 2)$ と原点を通る直線の方程式は $y = x$ である。図形 C と直線 $y = x$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (x-2)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2(x-2)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x-2 &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 3 \end{aligned}$$

となる。以下に、図形 C と直線 $y = x$ の交点を図示する。

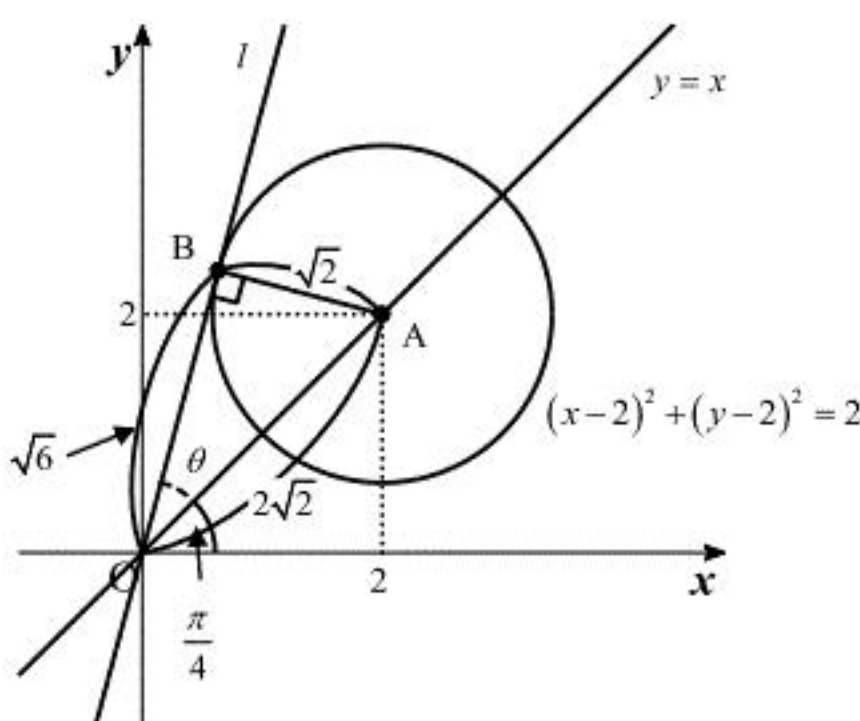


図より、 $|z|$ が最大となるのは、 P の座標が $(3, 3)$ 、すなわち $z = 3+3i$ となるときである。このとき、 $|z|$ の最大値 M は $M = 3\sqrt{2}$ となる。

(答) $M = 3\sqrt{2}$, $z = 3+3i$

(3)

円の中心を $A(2, 2)$ 、原点を通り $y > x$ の領域で図形 C と接する直線を接線 l 、図形 C と接線 l の接点を B とする。以下に、図形 C と直線 $y = x$ 、さらに接線 l を図示する。



図より、 P が B と一致するとき $\arg z$ は最大となる。上図のように、 $\angle AOB = \theta$ とおくと、

$OA = 2\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABO = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\triangle OAB$ は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。

したがって、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり、直線 $y = x$ と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{4}$ であるから、 $\arg z$ の最大値 m は、

$$m = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi$$

となる。このときの z の値は、三角関数の加法定理を用いると、

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right) \\ &= \sqrt{6} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \sqrt{6} \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \right) + i \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \sqrt{6} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \end{aligned}$$

となる。

(答) $m = \frac{5}{12}\pi$, $z = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$

(1)

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $\tan 2\theta, \tan \theta$ は存在するから、 $\tan 2\theta$ は倍角の公式を用いて、

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

(2)(i)

対偶をとり、「 $\tan 2\alpha$ が有理数ならば、 $\tan \alpha$ は有理数である。」という命題を考える。ここで、

$2\alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \right)$ とし、(1)の結果を用いて $\tan \frac{\pi}{8}$ を求めると、

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2} \left(\because \tan \frac{\pi}{8} > 0 \right)$$

となる。 $-1 + \sqrt{2}$ は無理数であるから、 $\alpha = \frac{\pi}{8}$ は命題「 $\tan 2\alpha$ が有理数ならば、 $\tan \alpha$ は有理数である」の反例である。したがって、題の命題は偽である。

$$(\text{答}) \quad \text{偽, 反例: } \alpha = \frac{\pi}{8}$$

(ii)

対偶をとり、「 $\tan \frac{\beta}{2}$ が有理数ならば、 $\tan \beta$ は有理数である。」という命題を考える。(1)の式

において、 $\theta = \frac{\beta}{2}$ を代入すると、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ を満たすから、

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$$

と書ける。 $\tan \frac{\beta}{2}$ が有理数であるとする、 $2 \tan \frac{\beta}{2}$ も有理数、 $1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}$ も有理数であるから、

$\frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$ は有理数である。よって、命題「 $\tan \frac{\beta}{2}$ が有理数ならば、 $\tan \beta$ は有理数である。」

は真である。したがって、命題「 $\tan \beta$ が無理数ならば、 $\tan \frac{\beta}{2}$ は無理数である。」は真である。

(証明終)

(1)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。また、 $t = -x$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $t \rightarrow \infty$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{t^2 + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(2)

$f(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

を得る。これより、 $f'(x) > 0$ を満たす x の値の範囲は $-1 < x < 1$ である。以下に $f(x)$ の増減表を示す。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	(0)

上表より、 $x = -1$ のときに極小値 $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ をとり、 $x = 1$ のときに極大値

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ をとる。}$$

$$(\text{答}) \quad \text{増減：前表，極小値：} -\frac{1}{2}, \text{極大値：} \frac{1}{2}$$

(3)

$y = f(x)$ と $y = f(x-2)$ から y を消去すると、交点の x 座標は、

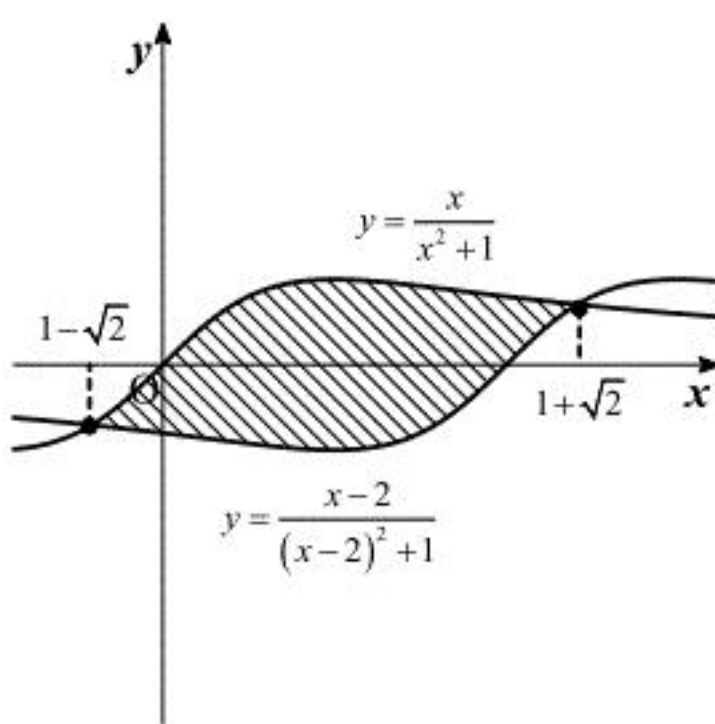
$$\begin{aligned}f(x) &= f(x-2) \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x-2}{(x-2)^2 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x\{(x-2)^2 + 1\} - (x-2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)\{(x-2)^2 + 1\}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)\{(x-2)^2 + 1\}} &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

(4)

C_2 は C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであることに注意すると、(2)における考察より、 C_1 と C_2 で囲まれた図形は以下の斜線部になる。



上図より、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x-2}{(x-2)^2 + 1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left\{ \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2(x-2)}{(x-2)^2 + 1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left[\frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} - \frac{\{(x-2)^2 + 1\}'}{(x-2)^2 + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(x^2 + 1) - \log\{(x-2)^2 + 1\} \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{x^2 + 1}{(x-2)^2 + 1} \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1}{(-1+\sqrt{2})^2 + 1} - \log \frac{(1-\sqrt{2})^2 + 1}{(-1-\sqrt{2})^2 + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1}{(-1+\sqrt{2})^2 + 1} \right\}^2 \\ &= \log \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ &= \log \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 2 \log(\sqrt{2} + 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 2 \log(\sqrt{2} + 1)$$