

1

(1)

面OACと面OBCのなす角を θ とする。 $\theta=0$ では点A,Bが一致してしまい、 $\theta=\pi$ では4点O,A,B,Cが同一平面上に存在するため、いずれも正四面体が存在しない。したがって、 $0<\theta<\pi$ である。ここで、辺OCの中点を点Mとおくと、 $\triangle OAC$ および $\triangle OBC$ は正三角形であるから、 $AM\perp OC$ および $BM\perp OC$ が成立する。したがって、 $\angle AMB=\theta$ である。ここで、 $\triangle AMB$ に対して余弦定理を用いると、 $OA=OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であることに用いて、

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - OA \cdot OB \cos \theta \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cos \theta \\ &= \frac{3}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $0<\theta<\pi$ において、 $0<4x^2<3\iff 0<x^2<\frac{3}{4}$ である。 $x>0$ であるこ

とから、 x がとり得る範囲は $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるといえる。

(答) $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)

辺ABの中点を点Nとおくと、四面体OABCは3点O,C,Nを通る平面に関して対称である。したがって、点Oから面ABCに対して下した垂線と面ABCの交点Hは直線CN上に存在する。ここで、三平方の定理より、

$$ON=CN=\sqrt{1-x^2}$$

が得られる。 $\triangle OHC$ において最長の辺はOCより $\angle ONC$ が鋭角か直角か鈍角かで場合分けをする。つまり $\cos \angle ONC \geq 0$ 、 $\cos \angle ONC < 0$ で場合分けをする。

[1] $\cos \angle ONC \geq 0$ のとき

$HN=y$ とおくと、点Hは線分CN上に存在する。 $\triangle ONC$ に余弦定理を用いて

$$\cos \angle ONC = \frac{ON^2 + CN^2 - OC^2}{2ON \cdot CN}$$

となるから、 $OC^2 \leq ON^2 + CN^2$ となる。よって

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2(1-x^2) \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq \frac{1}{2} \\ \therefore 0 < x &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\because 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\triangle OHN$ および $\triangle OHC$ において三平方の定理を用いることで、

$$\begin{aligned} OH^2 &= \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - y^2 \\ OH^2 &= 1^2 - \left(\sqrt{1-x^2} - y \right)^2 \end{aligned}$$

が得られる。 $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して連立して OH^2 を消去すると、

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - y^2 &= 1^2 - \left(\sqrt{1-x^2} - y \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1-x^2-y^2 &= 1 - (1-x^2) + 2\sqrt{1-x^2}y - y^2 \\ \Leftrightarrow 1-2x^2 &= 2\sqrt{1-x^2}y \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} OH^2 &= 1-x^2 - \left(\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2 \\ &= \frac{4(1-x^2)^2 - (1-2x^2)^2}{4(1-x^2)} \\ &= \frac{3-4x^2}{4(1-x^2)} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\cos \angle ONC < 0$ のとき

$HN=y$ とおくと、点Hは線分CNを除く半直線CN上に存在する。 $\triangle ONC$ に余弦定理を用いて

$$\cos \angle ONC = \frac{ON^2 + CN^2 - OC^2}{2ON \cdot CN}$$

となるから、 $OC^2 > ON^2 + CN^2$ となる。よって

$$\begin{aligned} 1 &> 2(1-x^2) \\ \Leftrightarrow x^2 &> \frac{1}{2} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} < x &< \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\because 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\triangle OHN$ および $\triangle OHC$ において三平方の定理を用いることで、

$$\begin{aligned} OH^2 &= \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - y^2 \\ OH^2 &= 1^2 - \left(\sqrt{1-x^2} + y \right)^2 \end{aligned}$$

が得られる。 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ に注意して連立して OH^2 を消去すると、

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - y^2 &= 1^2 - \left(\sqrt{1-x^2} + y \right)^2 \\ \Leftrightarrow 1-x^2-y^2 &= 1 - (1-x^2) - 2\sqrt{1-x^2}y - y^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-1 &= 2\sqrt{1-x^2}y \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2x^2-1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} OH^2 &= 1-x^2 - \left(\frac{2x^2-1}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2 \\ &= \frac{4(1-x^2)^2 - (2x^2-1)^2}{4(1-x^2)} \\ &= \frac{3-4x^2}{4(1-x^2)} \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、 $OH^2 = \frac{3-4x^2}{4(1-x^2)}$ となる。 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ に注意すると、 $OH > 0$ より、

$$OH = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-4x^2}{1-x^2}}$$

である。ここで、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2}$$

となる。以上より、四面体OABCの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot x\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-4x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{6} x\sqrt{3-4x^2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6} x\sqrt{3-4x^2}$

(3)

$V(x) = \frac{1}{6} x\sqrt{3-4x^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{1}{6} \sqrt{3-4x^2} + \frac{1}{6} x \cdot \frac{-8x}{2\sqrt{3-4x^2}} \\ &= \frac{(3-4x^2) - 4x^2}{6\sqrt{3-4x^2}} \\ &= \frac{-4\left(x + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{3\sqrt{3-4x^2}} \end{aligned}$$

となる。(1)の結果を用いて、 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ における増減表をかくと、以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$			極大		

以上より、四面体OABCの体積の最大値は、

$$V\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{3-4 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{1}{8}$$

となる。

(答) $\frac{1}{8}$

2

(1)

$y' = 2x$ より、点 $P(t, t^2)$ における曲線 C の接線の傾きは、 $2t$ と表せる。ここで $t > 0$ より、点 P における曲線 C の法線の傾きは、 $-\frac{1}{2t}$ と表せる。したがって、法線の方程式は、

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

(2)

放物線と円の共有点がただ1つであるということは、曲線 C と円 D は点 $P(t, t^2)$ で接しているということである。円 D の中心は曲線 C の点 $P(t, t^2)$ における法線上に存在するため、(1)の結果を用いて、

$$b(t) = -\frac{1}{2t}a(t) + t^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。また、円 D は x 軸と接しているため、円 D の中心と点 P との距離は円 D の中心と x 軸との距離と等しい。したがって、

$$\begin{aligned} b(t) &= \sqrt{\{a(t) - t\}^2 + \{b(t) - t^2\}^2} \\ \Leftrightarrow \{b(t)\}^2 &= \{a(t) - t\}^2 + \{b(t) - t^2\}^2 \quad (\because b(t) > 0) \\ \Leftrightarrow 2t^2b(t) &= \{a(t)\}^2 - 2ta(t) + t^2(1 + t^2) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。式①②を連立して解くと、

$$\begin{aligned} 2t^2 \left\{ -\frac{1}{2t}a(t) + t^2 + \frac{1}{2} \right\} &= \{a(t)\}^2 - 2ta(t) + t^2(1 + t^2) \\ \Leftrightarrow \{a(t)\}^2 - ta(t) - t^4 &= 0 \\ \therefore a(t) &= \frac{1}{2}t(1 + \sqrt{1 + 4t^2}) \quad (\because a(t) > 0) \end{aligned}$$

となる。 $a(t)$ から $b(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} b(t) &= -\frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{2}t(1 + \sqrt{1 + 4t^2}) + t^2 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{1 + 4t^2} + t^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a(t) = \frac{1}{2}t(1 + \sqrt{1 + 4t^2}), b(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{1 + 4t^2} + t^2 + \frac{1}{4}$

(3)

(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{b(t)}{a(t)} &= \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{1 + 4t^2} + t^2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}t(1 + \sqrt{1 + 4t^2})} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1 + 4t^2}) + 4t^2}{2t(1 + \sqrt{1 + 4t^2})} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{1 + 4t^2}) + 4t^2}{2t(1 + \sqrt{1 + 4t^2})} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 + 4t^2})}{(1 + \sqrt{1 + 4t^2})} \\ &= \frac{\{1 - (1 + 4t^2)\} + 4t^2(1 + \sqrt{1 + 4t^2})}{2t(1 + \sqrt{1 + 4t^2})^2} \\ &= \frac{2t\sqrt{1 + 4t^2}}{(1 + \sqrt{1 + 4t^2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{1}{t^2} + 4}}{\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4}\right)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\frac{1}{t^2} + 4}}{\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{0 + 4}}{(0 + \sqrt{0 + 4})^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(4)

(3)の途中過程より、 $\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{2t\sqrt{1 + 4t^2}}{(1 + \sqrt{1 + 4t^2})^2}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{b(t)}{ta(t)} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{1 + 4t^2}}{(1 + \sqrt{1 + 4t^2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{1 + 0}}{(1 + \sqrt{1 + 0})^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

3

(1)

曲線 $y = \log \frac{1}{x}$ 上の点 $P\left(t, \log \frac{1}{t}\right)$ における接線を求める。 $y' = -\frac{1}{x}$ であるため、接線の方程式は、

$$y - \log \frac{1}{t} = -\frac{1}{t}(x - t) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{t}x + \log \frac{1}{t} + 1$$

となる。この接線が原点を通るとき、この接線は ℓ と一致する。その時の t を求めると、

$$0 = \log \frac{1}{t} + 1 \Leftrightarrow t = e$$

となる。したがって、接線 ℓ の方程式は、

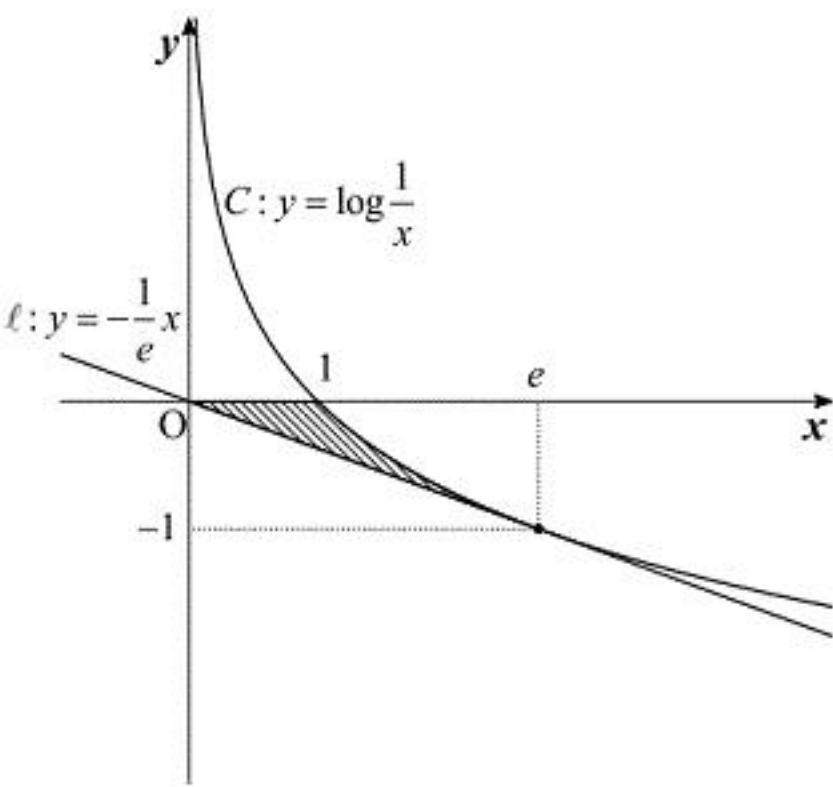
$$y = -\frac{1}{e}x$$

である。

(答) $y = -\frac{1}{e}x$

(2)

(1)で求めた接線 ℓ と曲線 C および与えられた領域を図示すると以下の斜線部のようになる。



したがって、図示した領域の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{e}x \right) \right\} dx + \int_1^e \left\{ \log \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{e}x \right) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{e}x dx + \int_1^e \log \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2e} [x^2]_0^1 + \int_1^e (x)' \log \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}e + \left[x \log \frac{1}{x} \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}e + (-e - 0) + (e - 1) \\ &= \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}e - 1$

(3)

$y = \log \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{-y}$ を用いると、与えられた図形を、 $y = h$ で切断した際に得られる断面は、半径 e^{-y} の円であるため、断面積は、 πe^{-2y} と表される。したがって $V(h)$ は、

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h \pi e^{-2y} dy \\ &= -\frac{\pi}{2} [e^{-2y}]_0^h \\ &= \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2h}) \end{aligned}$$

となる。極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} V(h) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2h}) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $V(h) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2h}), \lim_{h \rightarrow \infty} V(h) = \frac{\pi}{2}$

(4)

曲線 C と y 軸および2直線 $y = n - \frac{1}{2}, y = n$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転させてできる立体は、(3)において $h = n$ とした立体から、 $h = n - \frac{1}{2}$ とした立体を除いたものである。したがって、体積 a_n は、

$$\begin{aligned} a_n &= V(n) - V\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2n}) - \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2(n-1/2)}) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-2n} (e - 1) \end{aligned}$$

と表される。無限級数を考えると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-2n} (e - 1) \\ &= \frac{\pi}{2} (e - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} \\ &= \frac{\pi}{2} (e - 1) \cdot \frac{1}{e^2 (1 - e^{-2})} \\ &= \frac{\pi}{2(e+1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2(e+1)}$