1

(1)(i)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x-1}+4^{x+1}}{2^{x+1}-4^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^{x-1}}{4^{x-1}}+\frac{4^{x+1}}{4^{x-1}}}{\frac{2^{x+1}}{4^{x-1}}-\frac{4^{x-1}}{4^{x-1}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+16}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-1}$$
$$=-16$$

である。

(答) -16

(ii)

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{3x}$ において $y=x-1$ と置換することにより,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{3x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3(y+1)}$$
$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}\right\}$$
$$=\lim_{y\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right\}^{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}\right]$$
$$=e^3$$

を得る。

(答) e^3

(2)

$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ より

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

であるから $f'(2)=\frac{5}{9}$ である。

(答) $f'(2)=\frac{5}{9}$

(3)(i)

$$\int_{\log 2}^{\log 8}\sqrt{e^x}\,dx=\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_{\log 2}^{\log 8}$$
$$=2\left(e^{\frac{\log 8}{2}}-e^{\frac{\log 2}{2}}\right)$$
$$=2\left(e^{\log 2\sqrt{2}}-e^{\log\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}$$

である。

(答) $2\sqrt{2}$

(ii)

部分積分を実行して,

$$\int_0^2 x\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x\right]_0^2+\int_0^2\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx$$
$$=-\frac{2}{\pi}+\left[\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right]_0^2$$
$$=-\frac{2}{\pi}$$

である。

(答) $-\frac{2}{\pi}$

$\boxed{2}$

(1)

与えられた方程式は

$$z^2=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と書き換えられる。ここでzを実数r $(r\geqq 0)$とθ $(0\leqq\theta<2\pi)$を用いて

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すと，ド・モアブルの定理より

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

である。よって整数kを用いることにより

$$\begin{cases} r^2=2 \\ 2\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

という関係が得られる。rとθの範囲に注意して，

$$\begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi \end{cases}$$

となる。$\theta=\dfrac{\pi}{6}$のとき

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2}$$

であり，$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$のとき

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2}$$

である。

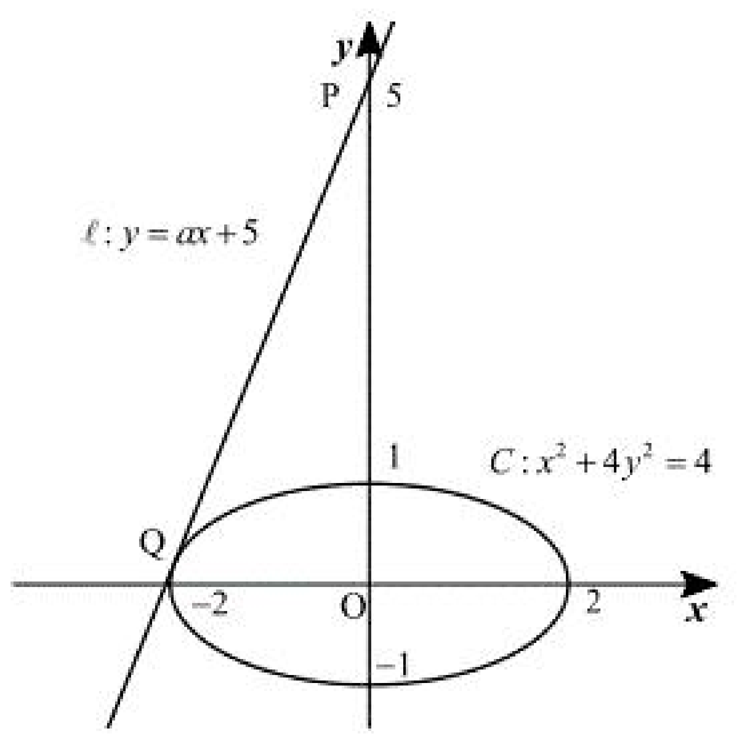
(答) $z=\pm\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2}$

(2)

直線ℓは点$\mathrm{P}(0,5)$を通る傾きが正の直線であるから，傾きをa $(a>0)$とすると

$$\ell: y=ax+5$$

と表せる。このとき直線ℓは下図のように楕円$C: x^2+4y^2=4$に接する。



ℓの式をCの式に代入してyを消去すると，

$$x^2+4(ax+5)^2=4$$

$$\Leftrightarrow (4a^2+1)x^2+40ax+96=0 \qquad \cdots ①$$

である。楕円Cに直線ℓが接するから①式の判別式$D/4=0$より

$$(20a)^2-(4a^2+1)\cdot 96=0$$
$$\Leftrightarrow 16a^2-96=0$$
$$\Leftrightarrow a^2=6$$

となり$a>0$に注意すると$a=\sqrt{6}$である。これより$\ell: y=\sqrt{6}x+5$を得る。また①式に$a=\sqrt{6}$を代入すると，接点Qのx座標は

$$25x^2+40\sqrt{6}x+96=0$$
$$\Leftrightarrow (5x+4\sqrt{6})^2=0$$
$$\therefore x=-\frac{4\sqrt{6}}{5}$$

であり，これをℓの式に代入することで接点Qのy座標は

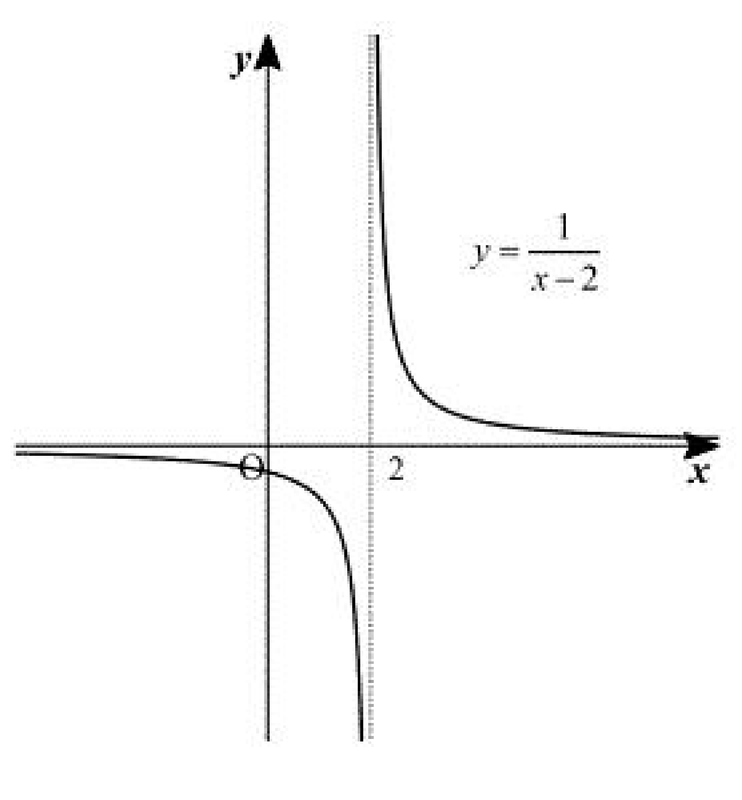
$$y=\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)+5=\frac{1}{5}$$

と求まる。

(答) $\ell: y=\sqrt{6}x+5,\ \mathrm{Q}\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(3)(i)

$y=\dfrac{1}{x-2}$のグラフは$y=\dfrac{1}{x}$のグラフをx軸方向に2だけ平行移動させたものであるから以下の図のようになる。



(答) 上図

(ii)

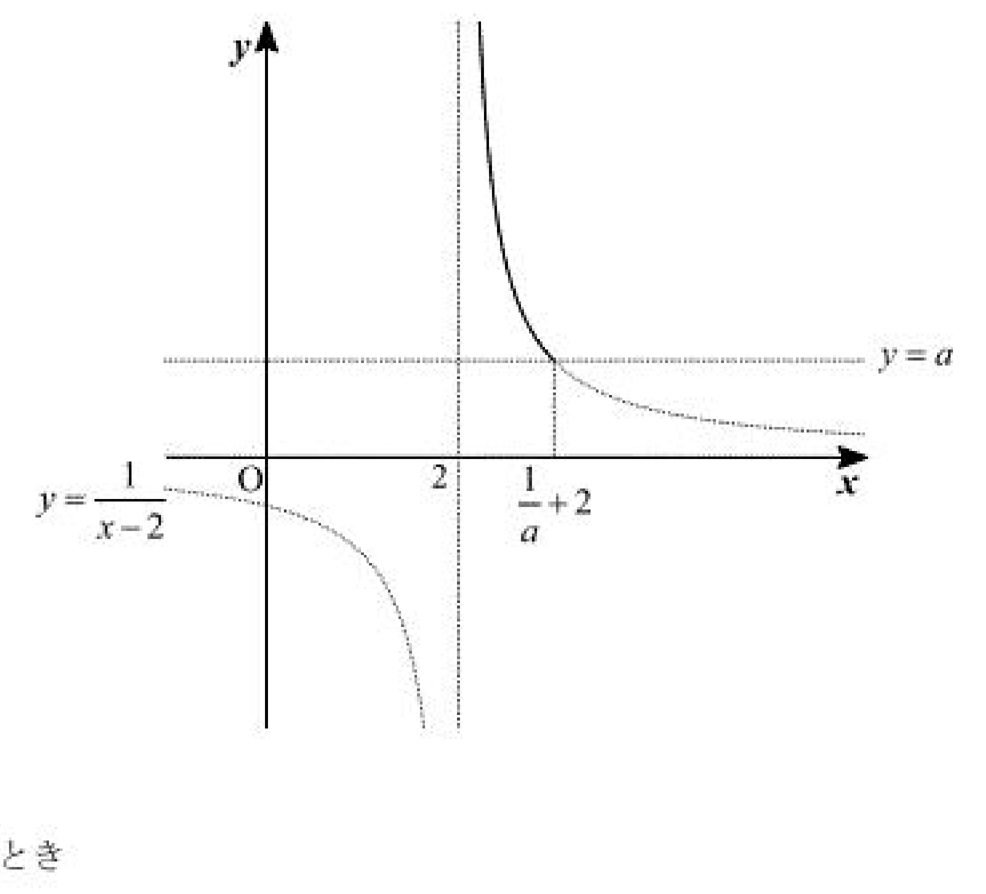
$y=\dfrac{1}{x-2}$と$y=a$のグラフの交点を考える。

[1] $a>0$のとき

交点のx座標は，

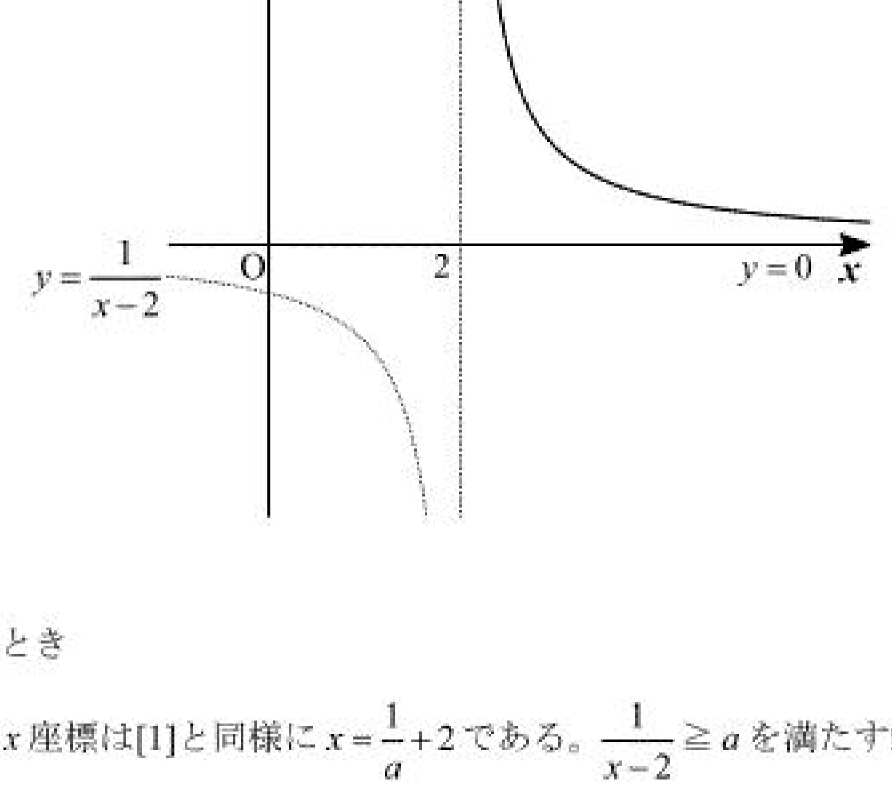
$$\frac{1}{x-2}=a$$
$$\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{a}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{a}+2$$

であるので$\dfrac{1}{x-2}\geqq a$を満たす範囲は以下の図より$2<x\leqq\dfrac{1}{a}+2$である。



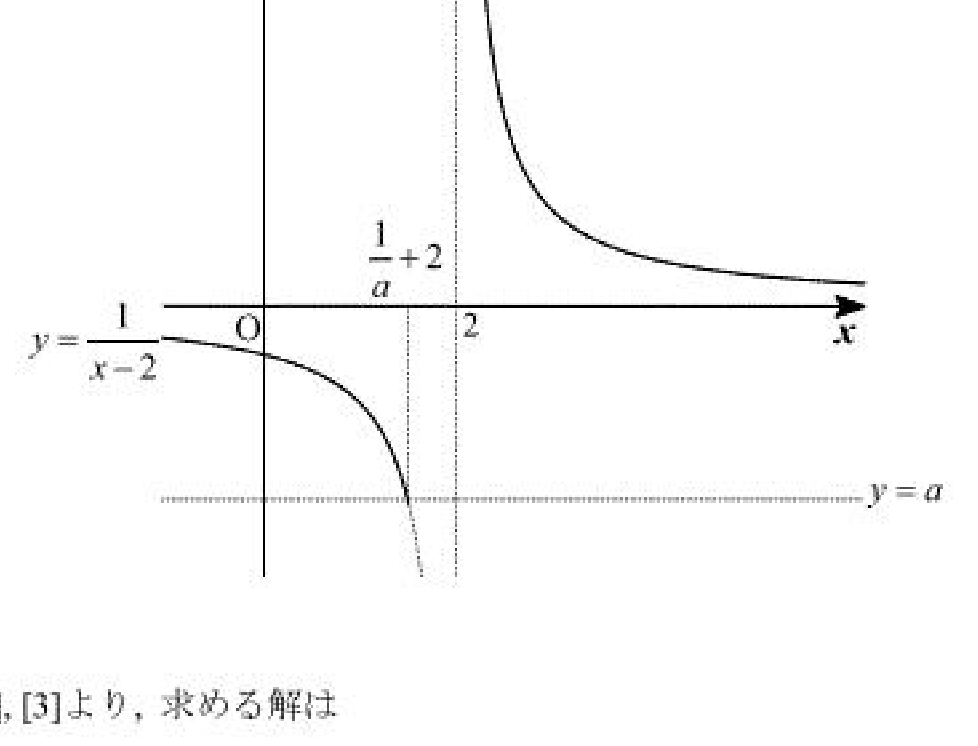
[2] $a=0$のとき

交点は存在せず，$\dfrac{1}{x-2}\geqq a$を満たす範囲は以下の図より$x>2$である。



[3] $a<0$のとき

交点のx座標は[1]と同様に$x=\dfrac{1}{a}+2$である。$\dfrac{1}{x-2}\geqq a$を満たす範囲は以下の図より$x\leqq\dfrac{1}{a}+2$または$x>2$である。



以上，[1], [2], [3]より，求める解は

$$\begin{cases} 2<x\leqq\dfrac{1}{a}+2 & (a>0) \\ x>2 & (a=0) \\ x\leqq\dfrac{1}{a}+2 \text{ または } x>2 & (a<0) \end{cases}$$

となる。

(答)
$2<x\leqq\dfrac{1}{a}+2$ $(a>0)$
$x>2$ $(a=0)$
$x\leqq\dfrac{1}{a}+2$ または $x>2$ $(a<0)$

3

(1)

8個の値の和とその値の平均の8倍は一致するから，

$$13+11+9+15+6+9+16+x=11.5\times 8$$
$$\therefore x=13$$

である。このデータを昇順に並べ替えると

6, 9, 9, 11, 13, 13, 15, 16

となるから中央値は $\dfrac{11+13}{2}=12$ である。

(答) $x=13$，中央値12

(2)

関数 $f(x)=4x^3-9x^2-12x$ を微分すると，

$$f'(x)=12x^2-18x-12$$
$$=6(2x+1)(x-2)$$

であるので以下の増減表が得られる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これより極大値は

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$$

であり，極小値は

$$f(2)=4\cdot 2^3-9\cdot 2^2-12\cdot 2=-28$$

である。

(答) 極大値 $\dfrac{13}{4}$ ($x=-\dfrac{1}{2}$ のとき)
極小値 -28 ($x=2$ のとき)

(3)

$\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ を有理数であると仮定すると $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}>0$ より，互いに素な2つの正の整数 p, q を用いて

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{q}{p}$$

と表せる。これより

$$p=\left(3-\sqrt{2}\right)q$$
$$\Leftrightarrow -p+3q=\sqrt{2}q$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{-p+3q}{q}$$

が得られるが，p, q は整数であることから，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾が生じる。よって $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ は無理数である。

(証明終)

4

(1)

数列$\{a_n\}$は初項8，公比rの等比数列であるからその一般項は$a_n=8\cdot r^{n-1}$である。また数列$\{b_n\}$は$b_n=\dfrac{1}{a_n}$で定められるからその一般項は$b_n=\dfrac{1}{8}\cdot r^{-n+1}$である。

(答)　$a_n=8\cdot r^{n-1},\ b_n=\dfrac{1}{8}\cdot r^{-n+1}$

(2)

(1)より$a_6=8\cdot r^5$であり，これが$-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$と一致するから

$$\begin{aligned}&8\cdot r^5=-\frac{9\sqrt{3}}{4}\\ \Leftrightarrow\ &r^5+\frac{9\sqrt{3}}{32}=0\\ \Leftrightarrow\ &r^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(r+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(r^4-\frac{\sqrt{3}}{2}r^3+\frac{3}{4}r^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}r+\frac{9}{16}\right)=0\end{aligned}$$

となり実数解$r=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$が得られる。また，

$$\begin{aligned}r^4-\frac{\sqrt{3}}{2}r^3+\frac{3}{4}r^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}r+\frac{9}{16}&=r^2\left(r-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{9}{16}r^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}r+\frac{9}{16}\\&=r^2\left(r-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{9}{16}\left(r-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\\&>0\end{aligned}$$

となり，実数解が$r=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$のみであることも示された。

(答)　$r=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)

S_nの定義より$S_3=8+8r+8r^2$であるから

$$\begin{aligned}&S_3<\frac{13}{2}\\ \Leftrightarrow\ &8+8r+8r^2<\frac{13}{2}\\ \Leftrightarrow\ &16r^2+16r+3<0\\ \Leftrightarrow\ &(4r+3)(4r+1)<0\end{aligned}$$

である。よって$-\dfrac{3}{4}<r<-\dfrac{1}{4}$である。これは$r$は$-1$でも0でもないことを満たす。

(答)　$-\dfrac{3}{4}<r<-\dfrac{1}{4}$

(4)

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項とS_n，T_nの定義より，

$$\begin{aligned}\frac{S_4}{T_4}&=\frac{8\left(1+r+r^2+r^3\right)}{\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)}\\&=64\cdot\frac{r^3\left(1+r+r^2+r^3\right)}{r^3+r^2+r+1}\\&=64r^3\end{aligned}$$

である。これが27と一致するから

$$\begin{aligned}&64r^3=27\\ \Leftrightarrow\ &r^3-\frac{27}{64}=0\\ \Leftrightarrow\ &r^3-\left(\frac{3}{4}\right)^3=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(r-\frac{3}{4}\right)\left(r^2+\frac{3}{4}r+\frac{9}{16}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(r-\frac{3}{4}\right)\left\{\left(r+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{27}{64}\right\}=0\end{aligned}$$

となり，$\left(r+\dfrac{3}{8}\right)^2+\dfrac{27}{64}>0$より，実数解$r=\dfrac{3}{4}$が得られる。

(答)　$r=\dfrac{3}{4}$